Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Lettres de Danemark, Copenhague,
6me série, Section des Sciences, t. VIII, nº 6.

Undersøgelser

over

Reciproke Potenssummer

og

deres Anvendelse paa Rækker og Integraler.

Af

Dr. **Niels Nielsen.**

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. VIII, 6.

København.
Hovedkommissionær: **Andr. Fred. Høst & Søn,** Kgl. Hof-Boghandel.
Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).
1898.

Pris: 1 Kr. 60 Øre.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter,

6te Række.

Naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling.

		Kr.	Øre
	I, med 42 Tavler, 1880—85	29.	50.
1.	**Prytz, K.** Undersøgelser over Lysets Brydning i Dampe og tilsvarende Vædsker. 1880	»	65.
2.	**Boas, J. E. V.** Studier over Decapodernes Slægtskabsforhold. Med 7 Tavler. Résumé en français. 1880	8.	50.
3.	**Steenstrup, Jap.** Sepiadarium og Idiosepius, to nye Slægter af Sepiernes Familie. Med Bemærkninger om to beslægtede Former Sepioloidea D'Orb. og Spirula Lmk. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1881	1.	35.
4.	**Colding, A.** Nogle Undersøgelser over Stormen over Nord- og Mellem-Europa af 12te—14de Novb. 1872 og over den derved fremkaldte Vandflod i Østersøen. Med 23 Planer og Kort. Résumé en français. 1881	10.	»
5.	**Boas, J. E. V.** Om en fossil Zebra-Form fra Brasiliens Campos. Med et Tillæg om to Arter af Slægten Hippidion. Med 2 Tavler. 1881	2.	»
6.	**Steen, A.** Integration af en lineær Differentialligning af anden Orden. 1882	»	50.
7.	**Krabbe, H.** Nye Bidrag til Kundskab om Fuglenes Bændelorme. Med 2 Tavler. 1882	1.	35.
8.	**Hannover, A.** Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Anencephalia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 2 Tavler. Extrait et explication des planches en français. 1882	1.	60.
9.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Cyclopia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 3 Tavler. Extrait et explic. des planches en français. 1884	4.	35.
10.	—— Den menneskelige Hjerneskals Bygning ved Synotia og Misdannelsens Forhold til Hjerneskallens Primordialbrusk. Med 1 Tavle. Extrait et explic. des planches en français. 1884	1.	30.
11.	**Lehmann, A.** Forsøg paa en Forklaring af Synsvinklens Indflydelse paa Opfattelsen af Lys og Farve ved direkte Syn. Med 1 Tavle. Résumé en français. 1885	1.	85.
	II, med 20 Tavler, 1881—86	20.	»
1.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 1ste Afhandling. Med 6 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1881	3.	15.
2.	**Lorenz, L.** Om Metallernes Ledningsevne for Varme og Elektricitet. 1881	1.	30.
3.	**Warming, Eug.** Familien Podostemaceae. 2den Afhandling. Med 9 Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1882	5.	30.
4.	**Christensen, Odin.** Bidrag til Kundskab om Manganets Ilter. 1883	1.	10.
5.	**Lorenz, L.** Farvespredningens Theori. 1883	»	60.
6.	**Gram, J. P.** Undersøgelser ang. Mængden af Primtal under en given Grænse. Résumé en français. 1884	4.	»
7.	**Lorenz, L.** Bestemmelse af Kviksølvsøjlers elektriske Ledningsmodstande i absolut elektromagnetisk Maal. 1885	»	80.
8.	**Traustedt, M. P. A.** Spolia atlantica. Bidrag til Kundskab om Salperne. Med 2 Tavler. Explic. des planches en français. 1885	3.	»
9.	**Bohr, Chr.** Om Iltens Afvigelser fra den Boyle-Mariotteske Lov ved lave Tryk. Med 1 Tavle. 1885	1.	»
10.	—— Undersøgelser over den af Blodfarvestoffet optagne Iltmængde udførte ved Hjælp af et nyt Absorptiometer. Med 2 Tavler. 1886	1.	70.
11.	**Thiele, T. N.** Om Definitionerne for Tallet, Talarterne og de tallignende Bestemmelser. 1886	2.	»
	III, med 6 Tavler, 1885—86	16.	»
1.	**Zeuthen, H. G.** Keglesnitslæren i Oldtiden. 1885	10.	»
2.	**Levinsen, G. M. R.** Spolia Atlantica. Om nogle pelagiske Annulata. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
3.	**Rung, G.** Selvregistrerende meteorologiske Instrumenter. Med 1 Tavle. 1885	1.	10.
4.	**Meinert, Fr.** De eucephale Myggelarver. Med 4 dobb. Tavler. Résumé et explic. des planches en français. 1886	6.	75.

(Fortsættes paa Omslagets S. 3.)

Undersøgelser

over

Reciproke Potenssummer

og

deres Anvendelse paa Rækker og Integraler.

Af

Dr. **Niels Nielsen.**

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr., 6. Række, naturvidensk. og math. Afd. VIII, 6.

København.

Bianco Lunos Kgl. Hof-Bogtrykkeri (F. Dreyer).

1898.

Indledning.

Vi forudsætte i det følgende Mærketallet n positivt, helt og indføre Betegnelserne

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^n}, \qquad t_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^n},$$

$$\sigma_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^n}, \qquad \tau_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^n},$$

saaledes at vi i de to første maa antage $n > 1$, medens vi for σ_1 og τ_1 faa

$$\sigma_1 = \log 2, \qquad \tau_1 = \frac{\pi}{4};$$

i det følgende bruge vi derfor saa at sige udelukkende Tegnet σ_1 i Stedet for det noget vidtløftigere log 2.

Da man uden Vanskelighed beviser Formlerne

$$s_n = \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1}\sigma_n, \qquad t_n = \frac{2^n-1}{2^n-2}\sigma_n, \qquad n > 1,$$

ere s_n og t_n overflødige i teoretisk Henseende. Vi have da ogsaa kun indført disse Rækker for at simplificere Formlerne.

Det er bekendt, at Rækkerne s_n spalte sig i to skarpt afsondrede Grupper, eftersom n er lige eller ulige, idet vi for de første have Ligninger af Formen

$$s_{2n} = \delta_n s_2^n = \varepsilon_n \pi^{2n},$$

hvor δ_n og ε_n ere rationale Tal, medens man, saavidt jeg ved, intet kender til Naturen af Rækkerne s_{2n+1}. Rækkerne τ_{2n+1} have lignende Egenskaber som s_{2n}, medens man intet ved om τ_{2n}.

Aarsagen til denne vor Viden om s_{2n} og τ_{2n+1} bunder i det Faktum, at disse Tal ere Udviklingskoefficienter i Potensrækkerne for $\pi \cot \pi x$ og $\pi \sec \pi x$.

Det er værd at lægge Mærke til, at der findes en lignende Spaltning af de Dobbeltrækker, der indføres ved p-Funktionen. Alle disse Summer, der have lige Exponenter, reduceres til dem, der have Exponenterne 4 og 6, medens intet tilsvarende kendes om Dobbeltsummerne med ulige Exponenter.

Maalet for de Undersøgelser, hvoraf et Brudstykke meddeles i den følgende Afhandling, var blandt andet det at trænge til Bunds i Spørgsmaalet om Naturen af Rækkerne s_{2n+1} og τ_{2n}.

Det laa da nær at forsøge paa at bevise den bekendte Formel

$$\frac{2n+1}{2} s_{2n} = s_2 s_{2n-2} + s_4 s_{2n-4} + \cdots s_{2p} s_{2n-2p} + \cdots + s_{2n-2} s_2 \qquad (\alpha)$$

direkte ud fra Definitionen for s_m, uden at ty til de trigonometriske Funktioners Egenskaber, hvilket atter naturlig maatte føre til at multiplicere to vilkaarlige af Rækkerne s_m, s_n og de analoge, en Undersøgelse, der gennemføres ved de ny Rækker

$$c_{m,n} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^m} \left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^n} \right),$$

$$d_{m,n} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^m} \left(\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \cdots + \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)^n} \right),$$

$$\gamma_{m,n} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^m} \left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^n} \right),$$

$$\delta_{m,n} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^m} \left(\frac{1}{1^n} - \frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} - \cdots + \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)^n} \right),$$

hvor vi altsaa for de to førstes Vedkommende maa antage $m > 1$.

Ad denne Vej faar man et simpelt Bevis for (α), ligesom man faar Midler til simple Beregninger af Summerne

$$s_2 s_{n-2} + s_3 s_{n-3} + \cdots + s_p s_{n-p} + \cdots s_{n-2} s_2,$$

og analoge; men det er ikke lykkedes mig at bevise en til (α) svarende Relation for Rækkerne s_{2n+1}.

Til ganske de samme Resultater som ved denne rent numeriske Metode kommer man ved Anvendelse af de *Jacob Bernoulli*'ske og analoge Funktioner, eller ved Rækkerne $\Omega_{m,n}$ og $\Omega'_{m,n}$, der ere nærliggende Generalisationer af $c_{m,1}$ og $\gamma_{m,1}$, og som have en Del ejendommelige og simple Egenskaber.

De samme Resultater kunne endelig ogsaa, hvad jeg ikke her i denne Afhandling skal opholde mig ved, findes ved Anvendelse af visse Fakultetrækker, der ere dannede ved en Generalisation af *Schlömilch*'s Metode[1]). Alle disse forskellige Fremgangsmaader briste imidlertid overfor det samme Problem, nemlig Summationen af Rækkerne

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{2^\nu \cdot \nu^n}$$

for $n > 3$.

Hr. Direktør, Dr. *Gram*, hvem jeg herved bringer min forbindtlige Tak for de nyttige Raad og Vink, han har givet mig under Udarbejdelsen af denne Afhandling, henledte min Opmærksomhed paa Rækken $\overset{(n)}{L}(x)$ i Art. 8 og paa Rækker, hvis Led ere visse Exponentialudtryk. Det er imidlertid heller ikke lykkedes mig at naa til noget Resultat ad denne Vej.

Da a_n indgaar i flere andre af mine Undersøgelser, har Dr. *Burrau* beregnet mig den efterfølgende Tavle over Summen af $a_1, a_2, a_3, \dots a_{64}$.

Medens Spørgsmaalet om Naturen af Rækkerne s_n altsaa endnu er aabent, ere disse Rækker ved *Stiltjes*'s Tabel[2]) os, i numerisk Henseende, lige saa bekendte som f. Ex. Kvadratrødderne af de hele Tal. Af den Grund betragter jeg i denne Afhandling en Række som summeret eller et Integral som fundet, saafremt Udtrykkene for dem alene indeholde π og de reciproke Potenssummer σ_n.

Ved de i det foregaaende omtalte Metoder er det lykkedes mig at komme til en fuldstændig Afslutning af Undersøgelsen over Integralerne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n} \log^p \cos\varphi \, d\varphi, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^n \cos\varphi \log^p \sin\varphi \, d\varphi, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^n \cos\varphi \log^p \sin\varphi \, d\varphi,$$

som jeg er bleven ført ind paa i mine tre tidligere Arbejder «*Sur la transformation d'une intégrale définie*»[3]), «*Sur la sommation de quelques séries*»[3]) og «*Théorème sur les intégrales etc.*»[4]).

Det vil være tilstrækkeligt her i Indledningen blot at nævne den ejendommelige Homogeneitet, der gaar gennem alle Formlerne, baade for Rækkernes og Integralernes Vedkommende.

---

[1]) Sitzungsberichte d. K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1859. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. IV.

[2]) Acta Mathematica, t. X.

[3]) Oversigt over Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1896.

[4]) Ibid., 1897.

Første Afsnit.

Om Rækkerne $c_{m,n}$ og de analoge.

I.

Rekursionsformler for s_n og σ_n.

§ 1. Udvikling af Produkterne $s_m s_n$, $s_m \sigma_n$ og $\sigma_m \sigma_n$.

1. Hvis Mærketallene m og n begge antages større end 1, ere Rækkerne s_m, s_n, σ_m og σ_n alle ubetinget konvergente, saa at vi tør multiplicere to vilkaarlige af dem paa sædvanlig Maade. Vi ville nærmere betragte et af de derved fremkomne Produkter, f. Ex.

$$s_m s_n = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \left(\frac{1}{1^m (\nu-1)^n} + \frac{1}{2^m (\nu-2)^n} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^m 1^n} \right). \tag{α}$$

For at ordne Leddene paa højre Side i (α) dele vi dem i tre Grupper, nemlig:

1° $\dfrac{1}{\nu^m} \cdot \dfrac{1}{\nu^n}$, $\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$

2° $\dfrac{1}{\nu^m} \left(\dfrac{1}{1^n} + \dfrac{1}{2^n} + \cdots + \dfrac{1}{(\nu-1)^n} \right)$, $\quad \nu = 2, 3, 4, \ldots,$

3° $\dfrac{1}{\nu^n} \left(\dfrac{1}{1^m} + \dfrac{1}{2^m} + \cdots + \dfrac{1}{(\nu-1)^m} \right)$, $\quad \nu = 2, 3, 4, \ldots,$

hvilket er tilladt, da Rækken paa højre Side i (α) ogsaa er ubetinget konvergent. Saaledes faa vi altsaa Formlen

$$s_m s_n = s_{m+n} + c_{m,n} + c_{n,m}. \tag{1}$$

Paa lignende Maade faa vi endvidere de to analoge Formler

$$s_m \sigma_n = \sigma_{m+n} + d_{m,n} - \gamma_{n,m}, \tag{1'}$$

$$\sigma_m \sigma_n = s_{m+n} - \delta_{m,n} - \delta_{n,m}. \tag{1''}$$

I (1) tør ingen af Mærketallene være 1; $c_{m,1}$ kan saaledes ikke indgaa i en Ligning af denne Form, skønt vi senere skulle vise, at netop denne Række bliver af stor Betydning ved Undersøgelsen af Produktet $s_m s_n$.

2. Da s_n er ubetinget konvergent, tør vi paa sædvanlig Maade udvikle Produktet $s_n\sigma_1$ [1]), hvorved vi altsaa faa

$$s_n\sigma_1 = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\left(\frac{1}{(\nu-1)^n\cdot 1} - \frac{1}{(\nu-2)^n\cdot 2} + \cdots + \frac{(-1)^\nu}{1^n\cdot(\nu-1)}\right). \qquad (\beta)$$

Da Rækken paa højre Side i (β) imidlertid kun er betinget konvergent, maa vi endnu bevise, at vi uden at forandre dens Sum kunne ordne dens Led, som (1') fordrer det. σ_{n+1} og $d_{n,1}$ ere ubetinget konvergente, saaledes at (β) altsaa kan skrives som

$$s_n\sigma_1 - \sigma_{n+1} - d_{n,1} = \sum_{\nu=3}^{\nu=\infty}\left(\frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)\cdot 1^n} + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-2)\cdot 2^n} + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{\nu+\varepsilon}{2}+1}}{\frac{\nu+\varepsilon}{2}\cdot\left(\frac{\nu-\varepsilon}{2}\right)^n}\right), \qquad (\beta')$$

hvor ε skal være 1 eller 2, eftersom ν er ulige eller lige.

Ordne vi nu Leddene paa højre Side i (β') efter Loven

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1^n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left(\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^n}\right) + \cdots, \qquad (\gamma)$$

se vi, at vi paa denne Maade faa alle de første Led i (β') med, saaledes at vi, ved at stanse (γ) ved det $\nu - 1^{\text{te}}$ Led, kunne vælge ν saa stor, at Summen af alle de tilbageblivende Led i (β') bliver mindre end enhver nok saa lille Størrelse. Da $\gamma_{1,n}$ endvidere er konvergent, se vi altsaa, at (1') gælder for $m > 1$, $n = 1$.

3. Ved Metoden i Art. 2 se vi ligeledes, at (1'') ogsaa gælder for $m > 1$, $n = 1$. Tilbage have vi altsaa kun at undersøge denne Formel for $m = n = 1$.

Schlömilch hævder ganske vist baade i Ord og i Gærning [2]), at den sædvanlige Multiplikationsregel kun tør anvendes paa uendelige Rækker, hvis Led have vexlende Fortegn, naar de positive og de negative Led for sig danne ubetinget konvergente Rækker. Uden at ty til de almindeligere Metoder [3]) beviser man imidlertid let direkte, at σ_1^2 tør udvikles efter *Cauchy*'s Regel [4]), og at det samme er Tilfældet med σ_1^n, hvor n er positiv, hel [5]). Og man ser da paa samme Maade som før, at (1'') ogsaa gælder for $m = n = 1$.

4. For $m = n$ faa vi af (1) og (1'') henholdsvis

$$c_{n,n} = \tfrac{1}{2}(s_n^2 - s_{2n}), \qquad (2)$$

$$\delta_{n,n} = \tfrac{1}{2}(s_{2n} - \sigma_n^2). \qquad (2')$$

---

[1]) Mertens, Crelle's Journal, Bd. 79, Pag. 182—184.
[2]) Schlömilch, Compendium d. höheren Analysis, Bd. I, Pag. 190.
[3]) Pringsheim, Mathematische Annalen, Bd. XXI, Pag. 327—378.
[4]) Pringsheim, loc. cit. Pag. 358.
[5]) Florian Cajori, American Journal of Mathematics, Vol. XVIII, Pag. 201.

For $n = 1$ faar man endelig af (2')

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{2}(s_2 - \sigma_1^2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\log^2 2, \tag{2''}$$

der ogsaa let kan bevises ved Anvendelse af visse Fakultetrækker. Endelig skulle vi senere udlede den samme Formel ved Hjælp af bestemte Integraler. Formlen (2″) kan endvidere udledes af en Gruppe Formler, *Schaeffer* har givet i Afhandlingen: «*De integrali etc.*» [1]).

§ 2. Anvendelse af Lagrange's Dekompositionsregel.

5. For nærmere at undersøge Afhængigheden mellem de reciproke Potenssummer s_n og σ_n og de andre numeriske Rækker, vi have indført i Art. 1, ville vi anvende *Lagrange*'s Regel for Dekomposition i Partialbrøker [2]), idet vi gaa ud fra Formlen

$$\frac{1}{x^p(x-a)^q} = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \frac{1}{a^{q+\rho}\, x^{p-\rho}} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} \frac{(-1)^\rho}{a^{p+\rho}(x-a)^{q-\rho}}. \tag{α}$$

Antage vi nu $a = n$ og $x = \nu$, hvor n og ν ere positive, hele Tal, faa vi af (α)

$$\frac{1}{\nu^p(n-\nu)^q} = \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \frac{1}{n^{q+\rho}\,\nu^{p-\rho}} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} \frac{1}{n^{p+\rho}(n-\nu)^{q-\rho}}, \tag{β}$$

medens $x = n$ og $a = \nu$ giver

$$\frac{1}{n^p(n-\nu)^q} = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \frac{1}{n^{p-\rho}\,\nu^{q+\rho}} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} \frac{(-1)^\rho}{\nu^{p+\rho}(n-\nu)^{q-\rho}}. \tag{β'}$$

6. Lade vi nu i (β) ν gennemløbe Værdierne $1, 2, 3, \ldots, n-1$, faa vi ved at addere de saaledes dannede Ligninger og anvende (a) i Art. 1:

$$s_p s_q = \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} c_{q+\rho,\,p-\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} c_{p+\rho,\,q-\rho}, \qquad p, q > 1. \tag{3}$$

Paa samme Maade faa vi ligeledes de analoge Formler

$$s_p \sigma_q = \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \delta_{q+\rho,\,p-\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} d_{p+\rho,\,q-\rho}, \qquad p > 1, \tag{3'}$$

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 30, Pag. 284.

[2]) Se f. Ex. L. Sauvage, Systèmes d'équations différentielles lin. et hom., Pag. 176.

$$\sigma_p \sigma_q = \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \gamma_{q+\rho,\, p-\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} \gamma_{p+\rho,\, q-\rho}. \tag{3''}$$

Formlerne (3) kunne uden Vanskelighed generaliseres paa forskellig Maade. Vi ville imidlertid ikke opholde os ved at nedskrive de derved fundne Relationer, som vi ikke senere faa nogen Anvendelse for.

7. Før vi kunne anvende (β') til Udvikling af Formler for $c_{m,n}$ og $\delta_{m,n}$ maa vi udskille det sidste Led under ethvert af Summationstegnene paa højre Side og sammentrække disse to Brøker. Derved faa vi da paa samme Maade som før

$$c_{p,q} = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-2} \binom{q+\rho-1}{q-1} c_{p-\rho,\, q+\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-2} (-1)^\rho \binom{p+\rho-1}{p-1} s_{p+\rho} \cdot s_{q-\rho} + (-1)^{q-1} \binom{p+q-2}{q-1} (c_{p+q-1,\,1} + s_{p+q}), \tag{4}$$

$$\delta_{p,q} = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-2} \binom{q+\rho-1}{q-1} d_{p-\rho,\, q+\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-2} (-1)^\rho \binom{p+\rho-1}{p-1} \sigma_{p+\rho} \cdot s_{q-\rho} + (-1)^q \binom{p+q-2}{q-1} (\gamma_{p+q-1,\,1} - \sigma_{p+q}), \tag{4'}$$

hvor p altsaa i begge Tilfælde maa forudsættes større end 1. For $q = 1$ skal den sidste Sum i begge Formlerne udelades.

Antage vi i (β') $p = 1$, $q > 1$, faa vi derimod

$$\gamma_{q,1} + (-1^{q-1} \delta_{1,q} = \sigma_{q+1} - \sum_{\nu=1}^{\frac{q-\varepsilon}{2}} s_{2\nu} \sigma_{q-2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{\frac{q-\varepsilon}{2}-1} s_{2\nu+1} \sigma_{q-2\nu}, \tag{5}$$

hvor ε betyder 0 eller 1, eftersom q er lige eller ulige. Anvende vi dernæst (1''), faa vi af (5)

$$\gamma_{q,1} + (-1)^q \delta_{q,1} = \sigma_{q+1} - \sum_{\nu=1}^{\frac{q-\varepsilon}{2}} s_{2\nu} \sigma_{q-2\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{\frac{q-\varepsilon}{2}-1} s_{2\nu+1} \sigma_{q-2\nu} + (-1)^q (s_{q+1} - \sigma_1 \sigma_q). \tag{5'}$$

For $p = q = 1$ faar man endelig

$$\gamma_{1,1} + \delta_{1,1} = \sigma_2,$$

hvoraf ved (2'')

$$\gamma_{1,1} = \tfrac{1}{2} \log^2 2. \tag{5''}$$

Ved samme Fremgangsmaade faa vi endvidere de med (4) og (4') analoge Formler

$$\gamma_{p,q} = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \gamma_{p-\rho,\, q+\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} (-1)^\rho \binom{p+\rho-1}{p-1} \sigma_{p+\rho} \cdot \sigma_{q-\rho}, \tag{6}$$

$$d_{p,q} = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \delta_{p-\rho,\, q+\rho} + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} (-1)^\rho \binom{p+\rho-1}{p-1} s_{p+\rho} \cdot \sigma_{q-\rho}, \quad p > 1. \tag{6'}$$

8. Medens vi ved Formlerne (3) i Art. 6 have udviklet Produkterne $s_p s_q$, $s_p \sigma_q$ og $\sigma_p \sigma_q$ som lineære Funktioner af de i Art. 1 indførte Rækker, have vi ved (4) og (6) kun delvis løst den omvendte Opgave, som vi derfor nærmere maa beskæftige os med i det følgende. Inden vi gaa over til denne vor Undersøgelse ville vi dog kort omtale en meget almindelig Generalisation af Formlerne i Art. 6 og 7.

Sætte vi nemlig for Kortheds Skyld

$$\overset{(n)}{L}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{x^\nu}{\nu^n},$$

$$\overset{(n,p)}{M}(x) = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{x^\nu}{\nu^n}\left(\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^p}\right),$$

hvor n og p forudsættes positive, hele, faa vi uden Vanskelighed af (β) og (β') de to Formler

$$\overset{(p)}{L}(x)\,\overset{(q)}{L}(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \overset{(q+\rho,\,p-\rho)}{M}(x) + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} \binom{p+\rho-1}{p-1} \overset{(p+\rho,\,q-\rho)}{M}(x), \tag{γ}$$

$$\overset{(p,q)}{M}(x) = (-1)^q \sum_{\rho=0}^{\rho=p-1} \binom{q+\rho-1}{q-1} \overset{(p-\rho,\,q+\rho)}{M}(x) + \sum_{\rho=0}^{\rho=q-1} (-1)^\rho \binom{p+\rho-1}{p-1} \overset{(p+\rho)}{L}(x)\,\overset{(q-\rho)}{L}(x). \tag{γ'}$$

Endvidere faa vi let den følgende Formel

$$\int_0^1 \frac{\overset{(p)}{L}(x) - \overset{(p)}{L}(ux)}{1-u} \log^{q-1} u\, du = (-1)^{q-1}(q-1)!\left(\overset{(p+q)}{L}(x) + \overset{(p,q)}{M}(x)\right). \tag{γ''}$$

$\overset{(2)}{L}(x)$ er undersøgt af *Legendre* [1]), *Abel* [2]) og navnlig *Schaeffer* [3]), der have bevist flere ejendommelige Sætninger om denne Funktion. Metoden, vi have anvendt ved Udledelsen af (γ''), giver en yderst simpel Løsning paa nogle af de Problemer, *Smaasen* [4]) har beskæftiget sig med.

---

[1]) Exercices de calcul intégrale, tome I, Pag. 244.
[2]) Œuvres complètes, tome II, Pag. 189.
[3]) Crelle's Journal, Bd. 30.
[4]) Crelle's Journal, Bd. 42.

§ 3. Rekursionsformler for s_n og σ_n.

9. Sætte vi i (4) $q = 1$, faa vi af denne Formel

$$c_{p,1} = s_{p+1} - \sum_{2}^{p-1} c_{p-\nu+1,\nu}, \qquad p > 2,$$

$$c_{2,1} = s_3,$$

hvoraf ved Anvendelse af (1)

$$c_{p,1} = \frac{p}{2} s_{p+1} - \frac{1}{2} \sum_{2}^{p-1} s_\nu s_{p+1-\nu}, \tag{α}$$

eller Rekursionsformlen

$$\sum_{2}^{p-1} s_\nu s_{p-\nu+1} = p\, s_{p+1} - 2\, c_{p,1}. \tag{7}$$

Af (4) faar man endvidere for $q = 2$, $p = 2n - 2$:

$$0 = \sum_{\rho=0}^{2n-4} (-1)^\rho (\rho + 1) s_{\rho+2} s_{2n-\rho-2} - (2n-2)(c_{2n-1,1} + s_{2n}), \qquad n > 1$$

der atter kan omformes til

$$2(c_{2n-1,1} + s_{2n}) = \sum_{1}^{n-1} s_{2\nu} s_{2n-2\nu} - \sum_{1}^{n-2} s_{2\nu+1} s_{2n-2\nu-1},$$

der, sammenlignet med (α), giver den bekendte Rekursionsformel

$$\sum_{1}^{n-1} s_{2\nu} s_{2n-2\nu} = \frac{2n+1}{2} s_{2n} \tag{8}$$

og de reducerede Formler

$$\left.\begin{aligned} c_{2n,1} &= n\, s_{2n+1} - \sum_{1}^{n-1} s_{2\nu} s_{2n-2\nu+1}, \\ c_{2,1} &= s_3, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{2n-1,1} &= \frac{2n-3}{4} s_{2n} - \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-2} s_{2\nu+1} s_{2n-2\nu-1}, \\ c_{3,1} &= \frac{1}{4} s_4. \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

Udtrykkene for $c_{2,1}$ og $c_{3,1}$ ere altsaa, formelt, ret mærkelige; af den første af disse Formler skulle vi senere give meget almindelige Generalisationer.

10. Af (6') faar man ligeledes for $q = 1$

$$d_{p,1} = s_p \sigma_1 - \sum_{1}^{p} \delta_{p-\nu+1,\nu},$$

der, ved Hjælp af (1''), giver Rekursionsformlen

$$\sum_1^p \sigma_\nu \sigma_{p-\nu+1} = p\, s_{p+1} - 2\sigma_1 s_p + 2 d_{p,1}, \tag{10}$$

der atter ved (1') kan omformes til

$$\sum_1^p \sigma_\nu \sigma_{p-\nu+1} = p\, s_{p+1} + 2\gamma_{1,p} - 2\sigma_{p+1}. \tag{10'}$$

Sættes dernæst i (6) $p = 1$, $q = 2n-1$, faar man endvidere

$$\gamma_{1,2n-1} = \tfrac{1}{2}\sum_0^{n-1} \sigma_{2\nu+1}\sigma_{2n-2\nu-1} - \tfrac{1}{2}\sum_0^{n-1}\sigma_{2\nu}\sigma_{2n-2\nu},$$

der sammen med (10') giver den bekendte Rekursionsformel

$$\sum_1^{n-1}\sigma_{2\nu}\sigma_{2n-2\nu} = \frac{2n-1}{2} s_{2n} - \sigma_{2n} \tag{11}$$

og de reducerede Formler

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{1,2n-1} &= \frac{1}{2}\sum_0^{n-1}\sigma_{2\nu+1}\sigma_{2n-2\nu-1} + \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{2n-1}{4} s_{2n}, \\ \gamma_{1,2n} &= \sum_0^{n-1}\sigma_{2\nu+1}\sigma_{2n-2\nu} + \sigma_{2n+1} - n\, s_{2n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} d_{2n-1,1} &= \frac{1}{2}\sum_0^{n-1}\sigma_{2\nu+1}\sigma_{2n-2\nu-1} + \sigma_1 s_{2n-1} - \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{2n-1}{4} s_{2n}, \\ d_{2n,1} &= \sum_0^{n-1}\sigma_{2\nu+1}\sigma_{2n-2\nu} + \sigma_1 s_{2n} - n\, s_{2n+1}. \end{aligned}\right\} \tag{12'}$$

11. Formlerne (7) og (10') kunne tjene til Beregning af Summerne

$$\sum_2^{n-2} s_\nu s_{n-\nu}, \qquad \sum_1^{n-1}\sigma_\nu \sigma_{n-\nu},$$

saafremt man paa en bekvem Maade kunde beregne Værdien af $c_{n-1,1}$ og $\gamma_{1,n-1}$.

Efter en simpel Omformning faar man imidlertid

$$c_{n-1,1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{1}{\nu}\left(s_{n-1} - \frac{1}{1^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{\nu^{n-1}}\right),$$

hvor Størrelsen i Parentesen under Summationstegnet let beregnes ved Anvendelse af Fakultetrækker.

Paa lignende Maade kan Summen

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\nu-1}$$

ganske vist ogsaa uden Vanskelighed beregnes med saa stor Nøjagtighed, det skal være[1]); men den lige skitserede Metode er sikkert simplere.

For at beregne $\gamma_{1,n-1}$ gøre vi bedst i at anvende en lignende Omformning som ved $c_{n-1,1}$, hvorved

$$\gamma_{1,n-1}=\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu^{n-1}}\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{\nu+3}-\cdots\right),$$

hvor Summationen nu ligeledes udføres uden Vanskelighed.

12. De to Rekursionsformler (8) og (11) ere som bekendt ensbetydende med Identiteterne

$$\pi^2+\pi^2\cot^2\pi x=\pi^2\operatorname{cosec}^2\pi x,$$
$$\pi^2\operatorname{cosec}^2\pi x=-D_x\pi\cot\pi x,$$

af hvilken Grund adskillige Forfattere have beskæftiget sig med disse Formler.

Vi ville her kun nævne *D. André*, der i en interessant Note[2]) har bragt (8) i Forbindelse med Antallene af «alternative Permutationer» (*permutations alternées*), idet *André* ved alternative Permutationer forstaar saadanne Permutationer af Elementerne a_1, $a_2\ldots a_n$, i hvilke Differensen mellem ethvert Index og det foregaaende er vexlende positiv og negativ.

§ 4. Sætninger om $c_{m,n}$ og de analoge.

13. Ved den i Art. 9 og 10 anvendte Metode kan man endvidere summere adskillige andre af Rækkerne $c_{m,n}$ og de analoge.

Saaledes faar man af (4) for $p=2$, $q=2n-1$

$$2c_{2,2n-1}=\sum_{\nu=0}^{\nu=2n-3}(-1)^{\nu}(\nu+1)s_{\nu+2}\cdot s_{2n-\nu-1}+(2n-1)(c_{2n,1}+s_{2n+1}),$$

hvoraf ved den første (9)

$$c_{2.2n-1}=\frac{(n+1)(2n-1)}{2}s_{2n+1}-\sum_{1}^{n-1}2\nu\, s_{2\nu+1}\,s_{2n-2\nu}. \tag{13}$$

[1]) Schlömilch, Compendium d. höheren Analysis, Bd. II, Pag. 98.

[2]) Comptes rendus, tome LXXXVIII, 1879.

Paa lignende Maade faar man ligeledes af (6)

$$\gamma_{2,\,2n-1} = \frac{n\,(2n-1)}{2}\, s_{2n+1} - \frac{2n-1}{2}\, \sigma_{2n+1} - \sum_{1}^{n-1} 2\nu\, \sigma_{2\nu+1}\, \sigma_{2n-2\nu}. \qquad (13')$$

(13) og (13') kunne generaliseres, idet man paa lignende Maade kan finde $c_{m,n}$ og $\gamma_{m,n}$ og dernæst altsaa ogsaa $d_{m,n}$ og $\delta_{m,n}$, naar blot $m-n$ er *ulige.*

Vi kunne imidlertid her forbigaa de dertil nødvendige Regninger, da vi senere ved bestemte Integraler langt lettere ville komme til de søgte Formler.

14. Hvis $m-n$ er *lige*, synes Summationen af $c_{m,n}$ og $\gamma_{m,n}$ derimod betydelig vanskeligere. Vi faa ganske vist af (3) for $p = q = 3$:

$$\tfrac{1}{2}\, s_3^2 = c_{3,3} + 3\, c_{4,2} + 6\, c_{5,1},$$

hvoraf ved (1) og (9')

$$c_{4,2} = s_3^2 - \tfrac{4}{3}\, s_6\,;$$

men videre kunne vi ikke komme ved disse Formler. For $m+n = 8$ vil det saaledes ikke være muligt af (3) og (4) at danne andre Ligninger end

$$2\, c_{5,3} + 5\, c_{6,2} = 10\, s_5\, s_3 - \tfrac{49}{4}\, s_8.$$

Derimod faa vi den følgende Sætning:

Enhver af Rækkerne $c_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$ og $d_{m,n}$, der have begge Mærketal ulige, er Summen af en lineær Funktion af de tilsvarende Rækker, der have samme Indexsum og lige Mærketal, og af et helt Polynomium, der er homogent af Graden $m+n$ i σ_1, $\sigma_2 \ldots \sigma_{m+n}$, naar σ_r regnes for at være af Graden r. Alle Koefficienterne i disse Udtryk ere rationale Tal.

Sætte vi nemlig i (4) og (6) efterhaanden $p = 3$, $q = 2n-3$; $p = 5$, $q = 2n-5 \ldots$; $p = 2n-3$, $q = 3$ og for γ tillige $p = 2n-1$, $q = 1$, bevises Sætningen uden Vanskelighed for $c_{m,n}$ og $\gamma_{m,n}$. Ved (1') bevises den da ogsaa for $d_{m,n}$.

Havde vi i de samme Formler efterhaanden sat $p = 2$, $q = 2n-2$ o. s. v., vilde de derved vundne Ligninger blive identiske med de forrige. Det samme gælder om de Ligninger, vi kunne udlede af (3) og (3'').

15. Ved (1) og (1'') se vi, at vi, for at kende alle Rækkerne $c_{m,n}$ eller $\delta_{m,n}$ med en bestemt Indexsum, kun behøve at kende dem, for hvilke $m > n$. Vi ville nu bevise, at $\gamma_{m,n}$ og $d_{m,n}$ have lignende Egenskaber.

Da det i Følge (1') er tilstrækkeligt at undersøge $\gamma_{m,n}$, gaa vi ud fra (3'').

Antage vi $p + q = \mu$, begynde vi med i Formlen at sætte $p - q = 0$ eller $p - q = 1$, eftersom μ er lige eller ulige. Højre Side af denne Ligning indeholder da ikke nogen Række γ, hvis første Mærketal er mindre end q. Ligningen løses med Hensyn til $\gamma_{q,p}$.

Dernæst anvende vi den samme Formel paa $\sigma_{p+1}\sigma_{q-1}$ og finde derved $\gamma_{q-1,p+1}$. Paa denne Maade fortsætte vi og faa da ved det almindelige Induktionsbevis følgende Sætning:

Enhver af Rækkerne $\gamma_{m,n}$, for hvilke $m \leqq n$, er lig Summen af et helt Polynomium, der er homogent af Graden $m+n$ i $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{m+n}$, og af en lineær Funktion af de Rækker γ, der have samme Indexsum og første Mærketal større end det sidste. Alle Koefficienterne i disse Udtryk ere hele Tal.

16. Vi ville her ikke opholde os ved at nedskrive de mer eller mindre ejendommelige Fomler, der i ret talrig Mængde kunne udledes af Art. 6 og 7.

Inden vi gaa over til at generalisere disse Formler bemærke vi blot endnu, at Sætningerne i Art. 14 og 15, Ord til andet, kunne udvides til de i Art. 8 definerede Funktioner $\overset{(m)}{L}(x)$ og $\overset{(p,q)}{M}(x)$.

II.

Rekursionsformler for Rækkerne t_n og τ_n.

§ 5. Om Produkterne $K(x)\beta(x)$ og de analoge.

17. Det er aabenbart, at de almindeligere Rekursionsformler (7), (10) og (10') maa svare til Sætninger om Funktionerne

$$K(x) = -D_x \log \Gamma(x) - C = \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\left(\frac{1}{x+\nu} - \frac{1}{\nu}\right),$$

$$\beta(x) = -D_x \log B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{x+\nu},$$

hvor C er den saakaldte *Euler*'ske Konstant.

Under Forudsætningen $|x| < 1$ faa vi altsaa

$$\left.\begin{aligned} K(1-x) &= s_2 x + s_3 x^2 + s_4 x^3 + \ldots . \\ \beta(1-x) &= \sigma_1 + \sigma_2 x + \sigma_3 x^2 + \ldots .. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Kvadreres dernæst (a), faar man ved Anvendelse af (7) og (10') henholdsvis

$$K^2(1-x) = D_x K(1-x) - s_2 - 2\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\left(\frac{1}{\nu-x} - \frac{1}{\nu}\right)\omega_{\nu-1}, \qquad (14)$$

$$\beta^2(1-x) = D_x K(1-x) - 2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} + \cdots + \frac{1}{\nu-x}\right), \qquad (14')$$

hvor vi for Kortheds Skyld have sat

$$\omega_r = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r}.$$

Ved Anvendelse af (10) vilde den sidste (α) derimod have givet Formlen

$$\beta^2(1-x) = \sigma_1^2 - s_2 + D_x K(1-x) - 2\sigma_1 K(1-x) + 2\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\left(\frac{1}{\nu-x} - \frac{1}{\nu}\right)\omega'_{\nu-1}, \quad (14'')$$

hvor

$$\omega'_r = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{r-1}}{r}, \qquad \omega'_0 = 1.$$

Af (14') og (14'') faar man da endelig den ny Formel

$$\sigma_1 K(1-x) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \frac{1}{2}s_2 + \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\left(\frac{1}{\nu-x} - \frac{1}{\nu}\right)\omega'_{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} + \cdots + \frac{1}{\nu-x}\right), \quad (15)$$

der kan opfattes som den til (1') for $m = n = 1$ svarende Formel, medens (14) og (14') svare til henholdsvis (1) og (1'') for $m = n = 1$.

18. De tre Formler (14) ere ganske vist kun beviste under den Forudsætning, at $|x| < 1$. Man ser imidlertid uden Vanskelighed, at Differensen mellem de to Funktioner, der findes paa hver Side af Lighedstegnene i de enkelte Formler, er holomorf for alle endelige x. Denne Differens maa altsaa være identisk 0 i hele Planen, da den er det indenfor Cirklen $x^2 + y^2 = 1$. Lade vi i (14) x voxe uden Grænse, faa vi af denne Formel

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\sum_{\nu=2}^{\nu=n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu-1}\right)\right] = s_2, \quad (14''')$$

der kan opfattes som den til (1) for $m = n = 1$ svarende Formel.

Af (15) faar man paa samme Maade, idet man erindrer Betydningen af $\gamma_{1,1}$:

$$\lim_{n=\infty}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) - \sum_{\nu=2}^{\nu=n}\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^\nu}{\nu-1}\right)\right] = \sigma_2 - \gamma_{1,1}, \quad (15')$$

eller den til (1') for $m = n = 1$ svarende Formel.

Ved samme Ræsonnement kunde man forøvrigt ved Hjælp af *Liouville*'s Fundamentalteorem bevise (14') uden at kende (10'). Vilde man derimod søge at bevise (14) og (15) ad denne Vej, maatte man først paa anden Maade godtgøre Rigtigheden af (14''') og (15'), hvilket synes at være forbunden med saa megen Vanskelighed, at jeg, i hvert Fald i denne Afhandling, har foretrukket det andet Bevis.

Ved Hjælp af Identiteterne

$$2\,K(x) = K\left(\tfrac{x}{2}\right) + K\left(\tfrac{x+1}{2}\right) - \sigma_1\,,$$
$$2\,\beta(x) = K\left(\tfrac{x}{2}\right) - K\left(\tfrac{x+1}{2}\right)$$

beviser man derimod let paa den antydede Maade den til (14) analoge Formel

$$K(x)\,\beta(x) = -\beta'(x) - \sigma_1\,\beta(x) - 2\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{x+\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{\nu-\varepsilon}\right), \tag{16}$$

hvor ε er 0 eller 1, eftersom ν er lige eller ulige.

Vilde man søge at bevise de i Art. 17—18 givne Formler ved Hjælp af Partialbrøkudviklingerne for $K(x)$ og $\beta(x)$, kunde man ganske vist, som bekendt, udvikle alle de betragtede Produkter af to uendelige Rækker efter *Cauchy*'s Regel[1]); men det synes imidlertid forbunden med betydelige Vanskeligheder at omforme de derved fundne Udtryk, som vore lige givne Formler kræve det.

19. Med en let forstaaelig Betegnelse kunne (14) og (14') skrives paa Formen

$$\left.\begin{aligned} K^2(1-x) &= D_x K(1-x) - s_2 - 2\,\Psi(1-x)\,,\\ \beta^2(1-x) &= D_x K(1-x) - 2\,\Phi(1-x). \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Sætte vi nu i (β) $1-x$ for x, faa vi af de bekendte Formler

$$K(x) - K(1-x) = \pi\cot\pi x\,,$$
$$\beta(x) + \beta(1-x) = \pi\,\mathrm{cosec}\,\pi x$$

de ny Formler

$$\Psi(x) + \Psi(1-x) = 2\,s_2 - K(x)\,K(1-x)\,, \tag{17}$$

$$\Phi(x) + \Phi(1-x) = \beta(x)\,\beta(1-x). \tag{17'}$$

Ved Anvendelse af (5') faa vi endelig den til (16) svarende Formel

$$K(x)\,\beta(1-x) = \sigma_1\beta(x) + \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu-x}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\nu-1}\right) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{x+\nu}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right) + s_2. \tag{17''}$$

20. Sætte vi nu for Kortheds Skyld

$$k_r(x) = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\,D_x^{r-1}K(x)\,, \qquad b_r(x) = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\,D_x^{r-1}\beta(x)\,,$$

faa vi

$$k_r(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{1}{(x+\nu)^r}\,, \qquad b_r(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{(x+\nu)^r}\,, \tag{γ}$$

hvor vi dog i den første maa antage $r > 1$.

[1]) Voss, Mathematische Annalen, Bd. XXIV, Pag. 45.

Med disse Betegnelser faa vi altsaa, ved at differentiere (14), (14') og (16) $n-2$ Gange med Hensyn til x, de tre Formler

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} k_\nu(x) k_{n-\nu}(x) = (n-1) k_n(x) - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{(x+\nu)^{n-1}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right), \tag{18}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} b_\nu(x) b_{n-\nu}(x) = (n-1) k_n(x) - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{(x+1)^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{(x+\nu-1)^{n-1}}\right), \tag{18'}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} k_\nu(x) b_{n-\nu}(x) = (n-1) b_n(x) - \sigma_1 b_{n-1}(x) - 2 \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{(x+\nu)^{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{\nu-\varepsilon}\right), \tag{18''}$$

der altsaa ved (γ) kunne opfattes som meget vidtrækkende Generalisationer af henholdsvis (7), (10') og (5').

§ 6. Rekursionsformler for Rækkerne t_n og τ_n.

21. Hvis vi sætte

$$t_1 = \tfrac{1}{2} K(\tfrac{1}{2}) = \log 2,$$

faa vi af (18) og (18') for $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} t_\nu t_{n-\nu} = (n-1) t_n - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2\nu}\right), \tag{19}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} \tau_\nu \tau_{n-\nu} = (n-1) t_n - 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu} \left(\frac{1}{1^{n-1}} + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{(2\nu-1)^{n-1}}\right). \tag{19'}$$

Ved gentagen Differentiation af (17) og (17') faa vi dernæst for $x = \frac{1}{2}$

$$\sum_1^{n-1} t_{2\nu} t_{2n-2\nu} - \sum_0^{n-1} t_{2\nu+1} t_{2n-2\nu-1} = 2 \left(D_x^{2n-2} \Psi(1-x)\right)_{x=\frac{1}{2}},$$

$$\sum_0^{n-1} \tau_{2\nu-1} \tau_{2n-2\nu-1} - \sum_1^{n-1} \tau_{2\nu} \tau_{2n-2\nu} = 2 \left(D_x^{2n-2} \Phi(1-x)\right)_{x=\frac{1}{2}},$$

hvoraf ved Sammenligning med (19) og (19') de bekendte Formler

$$\sum_1^{n-1} t_{2\nu} t_{2n-2\nu} = \sum_0^{n-1} \tau_{2\nu+1} \tau_{2n-2\nu-1} = \frac{2n-1}{2} t_{2n}. \tag{20}$$

22. Af selve Definitionen for $\gamma_{2n,1}$ og $\delta_{2n,1}$ faar man

$$\gamma_{2n,1} - \delta_{2n,1} = 2 \sum_{\nu=3}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^{2n}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\nu-\varepsilon}\right), \tag{α}$$

hvor ε er 1 eller 2, eftersom ν er ulige eller lige.

Ved Anvendelse af (19) og af Relationerne mellem s_m, σ_m og t_m, kan (α) atter omformes til

$$\gamma_{2n,1} - \delta_{2n,1} = \sigma_1 (s_{2n} + \sigma_{2n}) - 2n\,\sigma_{2n+1} + \sum_1^{n-1} \sigma_{2\nu}\, s_{2n-2\nu+1} + \sum_1^{n-1} \sigma_{2\nu+1}\, s_{2n-2\nu}, \qquad n > 1. \tag{β}$$

Adderes nu (β) og (5′), faar man

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{2n,1} &= \sum_1^{n-1} \sigma_{2\nu}\, s_{2n-2\nu+1} + \tfrac{1}{2} s_{2n+1} - \tfrac{2n-1}{2} \sigma_{2n+1}, \qquad n > 1, \\ \gamma_{2,1} &= \tfrac{1}{6} \sigma_3. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Ved Subtraktion af de samme Formler faar man derimod

$$\delta_{2n,1} = \tfrac{2n+1}{2} \sigma_{2n+1} + \tfrac{1}{2} s_{2n+1} - \sigma_1 \sigma_{2n} - \sum_0^{n-1} \sigma_{2\nu+1}\, s_{2n-2\nu}, \tag{21′}$$

der atter ved (1″) giver

$$\delta_{1,2n} = \tfrac{1}{2} s_{2n+1} + \sum_0^{n-1} \sigma_{2\nu+1}\, s_{2n-2\nu} - \tfrac{2n+1}{2} \sigma_{2n+1}. \tag{21″}$$

Behandles Differensen $\gamma_{2n-1,1} - \delta_{2n-1,1}$ paa samme Maade, bliver den til (β) svarende Formel identisk med (5′), saa at vi altsaa ikke ad denne Vej kunne reducere Rækkerne $\gamma_{2n-1,1}$ og $\delta_{2n-1,1}$ til de reciproke Potenssummer σ_r.

23. Af (18″) faar man for $x = 1$

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=n-1} s_\nu \sigma_{n-\nu} = (n-1)\sigma_n - \sigma_1 \sigma_{n-1} - 2 \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\nu-\varepsilon}\right); \tag{γ}$$

multiplicere vi derimod i (17″) med x, faa vi efter at have differentieret gentagne Gange med Hensyn til x og derpaa sat $x = 0$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} s_{2\nu} \sigma_{2n-2\nu} - \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} s_{2\nu+1} \sigma_{2n-2\nu-1} = 2 \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\nu-\varepsilon}\right) + \sigma_1 \sigma_{2n-1} - s_{2n},$$

der, adderet til (γ), giver den bekendte Formel

$$\sum_1^{n-1} s_{2\nu} \sigma_{2n-2\nu} = n\,\sigma_{2n} - \tfrac{1}{2} s_{2n}, \tag{22}$$

der atter ved Sammenligning med (8), (11) og (20) giver de analoge

$$\sum_1^{n-1} s_{2\nu} t_{2n-2\nu} = n\, t_{2n}, \tag{22′}$$

$$\sum_1^{n-1} \sigma_{2\nu} t_{2n-2\nu} = (n-1)\, t_{2n}. \tag{22″}$$

24. Sætte vi endelig i (18″) $x = \frac{1}{2}$, faa vi Rekursionsformlen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} t_\nu \tau_{n-\nu} = (n-1)\tau_n - \tfrac{1}{2}\sigma_1 \tau_{n-1} - \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{n-1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{\nu-\varepsilon}\right), \tag{23}$$

medens (17″) paa samme Maade giver

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} t_{2\nu}\tau_{2n-2\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} t_{2\nu+1}\tau_{2n-2\nu} = \tfrac{1}{2}\sigma_1 \tau_{2n} + \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{2n}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{\nu-\varepsilon}\right),$$

hvoraf ved (23) den bekendte Formel

$$\sum_1^n t_{2\nu}\tau_{2n-2\nu+1} = n\,\tau_{2n+1}. \tag{23'}$$

Ad denne Vej kunne vi ligeledes, hvad vi dog ikke ville opholde os ved, danne Udtryk for de tilsvarende Summer af $t_{2\nu}\tau_{2n-2\nu}$ og af $t_{2\nu+1}\tau_{2n-2\nu-1}$.

III.

Undersøgelse af $c_{m,n}$ og de analoge ved Bernoulli'ske Funktioner.

§ 7. Nogle Bemærkninger om de Bernoulli'ske Funktioner.

25. Vi definere de *Jacob Bernoulli*'ske og analoge Funktioner ved Ligningerne

$$D_\varphi S_m(\varphi) = C_{m-1}(\varphi), \qquad S_m(\varphi) = 0, \qquad m > 0, \tag{α}$$

$$D_\varphi C_m(\varphi) = -S_{m-1}(\varphi), \qquad C_m(0) = \sigma_m, \qquad m > 0, \tag{α'}$$

$$C_0(\varphi) = \tfrac{1}{2}, \qquad S_0(\varphi) = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi. \tag{α''}$$

Selve disse Definitioner vise da, at $C_{2n}(\varphi)$ og $S_{2n+1}(\varphi)$ ere hele Polynomier i φ af en Grad lig Funktionens Index. Derimod blive $C_{2n+1}(\varphi)$ og $S_{2n}(\varphi)$ transcendente Funktioner af φ, der kunne fremstilles som bestemte Integraler.

Definitionerne (α) vise ligeledes tydelig Funktionernes Diskontinuitetspunkter, som vi dog her fuldstændig kunne lade ude af Betragtning.

26. En anden og for vor kommende Undersøgelse langt vigtigere Egenskab ved vore Funktioner er deres Udvikling i *Fourier*'ske Rækker. For at komme til disse Udviklinger ville vi gaa ud fra de elementære Formler

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}\cos n\varphi &= \tfrac{1}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}, \\ \sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \cdots + (-1)^{n-1}\sin n\varphi &= \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi + (-1)^{n-1}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Integrere vi nemlig begge Ligningerne (β) fra 0 til φ, hvor $-\pi < \varphi < +\pi$, faa vi

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu} = \frac{\varphi}{2} + (-1)^{n-1} \int_0^{\varphi} \frac{\cos \frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} d\varphi, \tag{24}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^{\nu-1} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu} = \tfrac{1}{2}\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} + (-1)^{n} \int_0^{\varphi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} d\varphi. \tag{24'}$$

Da Faktoren $\sec\frac{1}{2}\varphi$ i hele Intervallet er positiv og stadig voxende, ser man af den første Sætning om Middelværdien, at Restintegralerne i (24) konvergere mod 0 med $\frac{1}{n}$, saa at vi altsaa under den givne Betingelse for φ faa Formlerne

$$S_1(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu}, \qquad C_1(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu}. \tag{25}$$

Ved gentagen Integration fra 0 til φ faa vi paa samme Maade de mere almindelige Formler

$$S_n(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu^n}, \qquad C_n(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu^n}, \tag{25'}$$

hvor $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$.

27. Paa lignende Maade kunne vi behandle Funktionerne

$$\overline{C}_n(\varphi) = -C_n(\pi - \varphi), \qquad \overline{S}_n(\varphi) = S_n(\pi - \varphi),$$
$$T_n(\varphi) = \tfrac{1}{2}\left(C_n(\varphi) + \overline{C}_n(\varphi)\right), \qquad U_n(\varphi) = \tfrac{1}{2}\left(S_n(\varphi) + \overline{S}_n(\varphi)\right).$$

Vi ville dog ikke gaa nærmere ind paa dette Æmne, men indskrænke os til at meddele Rækkeudviklingerne

$$\overline{C}_n(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu^n}, \qquad \overline{S}_n(\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\sin \nu\varphi}{\nu^n}, \tag{25''}$$

hvor vi maa forudsætte $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. For $n = 1$ gælde (25'') dog ikke for selve Grænseværdierne 0 og 2π.

Man faar ligeledes

$$T_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{(2\nu+1)^n}, \qquad U_n(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\sin(2\nu+1)\varphi}{(2\nu+1)^n}, \tag{25'''}$$

hvor $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. For $n = 1$ gælde (25''') altsaa heller ikke for selve Grænserne 0 og π.

28. Som en første Anvendelse af de almindelige Formler (25) ville vi beregne Værdien af

$$a_{2\rho+1} = \left[D^{2\rho+1}(C_{2m}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi))\right]_{\varphi=\pi}.$$

Vi anvende *Leibniz*'s Formel og faa altsaa af selve Definitionerne (α)

$$D_{\varphi}^{2\rho+1}(C_{2m}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi)) = (-1)^{\rho+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\rho} \binom{2\rho+1}{2\mu} C_{2m-2\mu}(\varphi)\, S_{2n-2\nu-1}(\varphi) + (-1)^{\rho+1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\rho} \binom{2\rho+1}{2\mu+1} S_{2m-2\mu-1}(\varphi)\, C_{2n-2\nu}(\varphi), \qquad (\gamma)$$

hvor $\mu + \nu = \rho$.

Da $S_1(\varphi)$ ifølge (25') er den eneste af Funktionerne $S_{2n+1}(\varphi)$, der for $\varphi = \pi$ har en fra 0 forskellig Værdi, giver (γ) umiddelbart de følgende Resultater, idet $m \geqq n$:

$$\rho < n-1, \qquad a_{2\rho+1} = 0,$$

$$m-1 > \rho \geqq n-1, \qquad a_{2\rho+1} = (-1)^{\rho} \binom{2\rho+1}{2n-1} \frac{\pi}{2} s_{2m+2n-2\rho-2},$$

$$m+n-1 > \rho \geqq m-1, \qquad a_{2\rho+1} = (-1)^{\rho} \left(\binom{2\rho+1}{2n-1} + \binom{2\rho+1}{2m-1}\right) \frac{\pi}{2} s_{2m+2n-2\rho-2},$$

$$\rho = m+n-1, \qquad a_{2\rho+1} = (-1)^{\rho+1} \left(\binom{2\rho+1}{2n-1} + \binom{2\rho+1}{2m-1}\right) \frac{\pi}{4},$$

$$\rho > m+n-1, \qquad a_{2\rho+1} = 0.$$

29. Af de i Art. 25 antydede Formler for $S_{2n+1}(\varphi)$ og $C_{2n}(\varphi)$ og de analoge for $\overline{S}_{2n+1}(\varphi)$ og $\overline{C}_{2n}(\varphi)$ kan man udlede en Del andre. Sætte vi saaledes i disse Formler $\varphi = \pi$, faa vi fire bekendte Rekursionsformler for s_{2n} og σ_{2n}, der sætte os i Stand til fuldstændig at beherske disse Rækker.

Som det er bemærket allerede af *Raabe*[1]), staa disse Formler i nøje Forbindelse med Rækkeudviklingerne for $\pi \operatorname{cosec} \pi x$ og $\pi \cot \pi x$.

Havde vi i de samme Formler sat $\varphi = \frac{\pi}{2}$, kunde vi paa lignende Maade finde Værdien af τ_{2n+1}.

For $\varphi = \frac{\pi}{4}$ faa vi endelig af de samme Formler

$$\left.\begin{aligned} A_{2p} &= \frac{1}{1^{2p}} - \frac{1}{3^{2p}} - \frac{1}{5^{2p}} + \frac{1}{7^{2p}} + \frac{1}{9^{2p}} - \frac{1}{11^{2p}} - \cdots\cdots = \varepsilon_p \sqrt{2} \cdot \pi^{2p}, \\ B_{2p+1} &= \frac{1}{1^{2p+1}} + \frac{1}{3^{2p+1}} - \frac{1}{5^{2p+1}} - \frac{1}{7^{2p+1}} + \frac{1}{9^{2p+1}} + \cdots = \delta_p \sqrt{2} \cdot \pi^{2p+1}, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

hvor δ_p og ε_p ere rationale Tal.

(26) ere udviklede ved ganske andre Metoder af *Berger*[2]). Den sidste er for $p = 0$ allerede funden af *Euler*[3]).

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 42, Pag. 348.

[2]) Sur une sommation de quelques séries, Nova Acta Reg. Soc. Ups., 1883.

[3]) Introductio ad Analysin infinitorum, cap. X.

30. De Integraler, der indgaa i Udtrykkene for $S_{2n}(\varphi)$ og $C_{2n+1}(\varphi)$ og de analoge, hindre Dannelsen af tilsvarende Rekursionsformler for Rækkerne s_{2n+1} og τ_{2n}. De omtalte Formler sætte os i Virkeligheden kun i Stand til at finde disse Integraler udtrykte ved reciproke Potenssummer.

Ad anden Vej kunde dette ske ved Hjælp af Formlerne

$$\left.\begin{aligned} \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi &= C_1(\varphi) - \sigma_1, \\ \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi &= -\overline{C}_1(\varphi) - \sigma_1, \\ \log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi &= -T_1(\varphi), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

der sammen med Definitionerne (α) kunne tjene til Bestemmelsen af en Mængde Integraler, hvorved vi blandt andet kunne udlede alle vore tidligere numeriske Formler.

Af de to første (27) faar man f. Ex.

$$\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \int_0^\pi \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} C_1(\varphi)\, d\varphi - \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\sigma_1,$$

$$\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!} \overline{C}_1(\varphi)\, d\varphi - \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\sigma_1,$$

hvoraf ved Anvendelse af delvis Integration

$$\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\sigma_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^\nu \frac{\pi^{2n-2\nu}}{(2n-2\nu)!}\sigma_{2\nu+1} + (-1)^n s_{2n+1},$$

$$\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n-1}}{(2n-1)!}\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\sigma_1 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{\nu-1} \frac{\pi^{2n-2\nu}}{(2n-2\nu)!} s_{2\nu+1} + (-1)^{n-1}\sigma_{2n+1}.$$

Den sidste er, for $n=1$ og under en noget anden Form, givet af *Legendre*[1]).

§ 8. Bestemmelse af $\int_0^\pi C_m(\varphi)\, C_n(\varphi)\, d\varphi$ og analoge Integraler.

31. Ved Anvendelse af den elementære Formel

$$\frac{\sin m\varphi \cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = 1 + 2(\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos(m-1)\varphi) + \cos m\varphi,$$

[1]) Exercices de calcul intégrale, 5, 61.

der, som bekendt, under forskellige Omformninger spiller en vigtig Rolle i de *Fourier*'ske Rækkers Teori [1]), faar man efter at have anvendt delvis Integration:

$$\int_0^\pi \cos p\varphi \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2p}, \tag{28}$$

hvoraf, idet $m \geqq 1$,

$$\int_0^\pi C_m(\varphi) \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sigma_{m+1}, \tag{29}$$

$$\int_0^\pi \overline{C}_m(\varphi) \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} s_{m+1}. \tag{29'}$$

Da Rækken for $C_1(\varphi)$ og Funktionen $\log \sin \frac{1}{2}\varphi$ begge ere integrable fra 0 til π, viser en bekendt Sætning [2]), at (29) og (29') ogsaa gælde for $m = 1$.

32. Formlerne (29) kunne uden Vanskelighed generaliseres. Man vilde opnaa dette ved delvis Integration; men det er lettere at gaa en anden Vej. Af den bekendte Formel

$$\int_0^\pi \cos\mu\varphi \cos\nu\varphi \, d\varphi = \begin{cases} 0, & \mu \gtrless \nu, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \mu = \nu, \end{cases}$$

faar man, idet $m > 1$ og $n > 1$:

$$\int_0^\pi C_m(\varphi)\, C_n(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi \overline{C}_m(\varphi)\, \overline{C}_n(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} s_{m+n}, \tag{30}$$

$$\int_0^\pi \overline{C}_m(\varphi)\, C_n(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi C_m(\varphi)\, \overline{C}_n(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \sigma_{m+n}. \tag{30'}$$

Paa samme Maade faar man

$$\int_0^\pi S_m(\varphi)\, S_n(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi \overline{S}_m(\varphi)\, \overline{S}_n(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} s_{m+n}, \tag{31}$$

$$\int_0^\pi \overline{S}_m(\varphi)\, S_n(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi S_m(\varphi)\, \overline{S}_n(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \sigma_{m+n}, \tag{31'}$$

hvor et eller to af Mærketallene ligeledes tør være 1. Det samme er Tilfældet med de analoge Formler

$$\int_0^\pi T_m(\varphi)\, T_n(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi U_m(\varphi)\, U_n(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} t_{m+n}. \tag{32}$$

---

[1]) G. Lejeune-Dirichlet, Gesammelte Werke, Bd. I, Pag. 129; Crelle's Journal, Bd. 4.
[2]) Ulisse Dini, Theorie d. Funktionen e. reellen Grösse, Pag. 525.

Den af os lige anvendte Metode ved Udviklingen af Formlerne (30)—(32) er den saakaldte *Parseval*'s Metode [1]. Da *Parseval* imidlertid intet siger om Metodens Rækkevidde, kunde man her med Rette afpasse *Kronecker*'s Bemærkning [2] om den saakaldte *Laurent*'s Række: Det kan ikke kaldes nogen Opdagelse at anvende en elementær trigonometrisk Formel.

33. Ved de i Art. 31—32 beviste Formler kan man udlede en Del andre. Saaledes faa vi f. Ex. ved (27)

$$\int_2^\pi C_{2m}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\sigma_1 \int_0^\pi C_{2m}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi)\, d\varphi + \int_0^\pi C_{2m}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi)\, C_1(\varphi)\, d\varphi. \qquad (\alpha)$$

Da det sidste Integral paa højre Side i (α) let bestemmes ved delvis Integration og ved Anvendelse af Formlerne i Art. 28, faar man ved (30):

$$\int_0^\pi C_{2m}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sigma_1 s_{2m+2n} - \frac{\pi}{2}\sum_{\rho=m}^{m+n-1}\binom{2\rho-1}{2m-1} s_{2\rho+1}\, s_{2m+2n-2\rho}$$
$$-\frac{\pi}{2}\sum_{\rho=n}^{m+n-1}\binom{2\rho-1}{2n-1} s_{2\rho+1}\, s_{2m+2n-2\rho} + \frac{\pi}{4}\left(\binom{2m+2n-1}{2n-1} + \binom{2m+2n-1}{2m-1}\right) s_{2m+2n+1}. \qquad (33)$$

Paa samme Maade faar man ligeledes den analoge Formel

$$\int_0^\pi S_{2m+1}(\varphi)\, S_{2n+1}(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sigma_1 s_{2m+2n+2} + \frac{\pi}{2}\sum_{\rho=m}^{m+n-1}\binom{2\rho+1}{2m} s_{2\rho+3}\, s_{2m+2n-2\rho}$$
$$+\frac{\pi}{2}\sum_{\rho=n}^{m+n-1}\binom{2\rho+1}{2n} s_{2\rho+3}\, s_{2m+2n-2\rho} - \frac{\pi}{4}\left(\binom{2m+2n+1}{2m} + \binom{2m+2n+1}{2n}\right) s_{2m+2n+3}. \qquad (33')$$

I (33) og (33') have vi dog forudsat $m > 0$ og $n > 0$; hvis et af Mærketallene er 0, maa den Sum, der bliver meningsløs, udelades.

Det er aabenbart, at vi paa samme Maade kunne udvikle adskillige andre analoge Integraler, hvilket vi dog ikke her ville opholde os ved.

§ 9. Nyt Bevis for Rekursionsformlerne for s_n og σ_n.

34. Ved at anvende delvis Integration paa

$$\int_0^\varphi S_{2n-1}(\varphi)\, C_{2n}(\varphi)\, d\varphi \quad \text{og} \quad \int_0^\varphi C_{2n}(\varphi)\, S_{2n+1}(\varphi)\, d\varphi, \qquad (\alpha)$$

[1] G. F. Meyer, Theorie der bestimmten Integrale, Pag. 364.
[2] Vorlesungen über Mathematik, Bd. I, Pag. 177.

der begge let bestemmes direkte, faa vi efter en simpel Mellemregning

$$C_{2n}(\varphi) = \sigma_{2n} + \sum_1^{n-1} \sigma_{2\nu}\, \sigma_{2n-2\nu} - \sum_0^{n-1} S_{2\nu+1}(\varphi)\, S_{2n-2\nu-1}(\varphi) - \sum_1^{n-1} C_{2\nu}(\varphi)\, C_{2n-2\nu}(\varphi). \qquad (\beta)$$

Paa lignende Maade faa vi ligeledes

$$\overline{C}_{2n}(\varphi) = s_{2n} - \sum_1^{n-1} s_{2\nu}\, s_{2n-2\nu} + \sum_0^{n-1} \overline{S}_{2\nu+1}(\varphi)\, \overline{S}_{2n-2\nu-1}(\varphi) + \sum_1^{n-1} S_{2\nu}(\varphi)\, S_{2n-2\nu}(\varphi), \qquad (\gamma)$$

$$0 = \sum_1^{n-1} t_{2n}\, t_{2n-2\nu} - \sum_0^{n-1} U_{2\nu+1}(\varphi)\, U_{2n-2\nu-1}(\varphi) - \sum_1^{n-1} T_{2\nu}(\varphi)\, T_{2n-2\nu}(\varphi). \qquad (\delta)$$

For at reducere de numeriske Led i (β), (γ) og (δ) integrere vi disse Formler fra 0 til π. Ved Anvendelse af (30)—(32) faa vi derved Rekursionsformlerne (8), (11) og den første (20), medens vore Formler gaa over til

$$\sum_0^{n-1} S_{2\nu+1}(\varphi)\, S_{2n-2\nu-1}(\varphi) + \sum_1^{n-1} C_{2\nu}(\varphi)\, C_{2n-2\nu}(\varphi) + C_{2n}(\varphi) = \frac{2n-1}{2} s_{2n}, \qquad (34)$$

$$\sum_1^{n-1} U_{2\nu+1}(\varphi)\, U_{2n-2\nu-1}(\varphi) + \sum_1^{n-1} T_{2\nu}(\varphi)\, T_{2n-2\nu}(\varphi) = \frac{2n-1}{2} t_{2n}, \qquad (34')$$

der altsaa kunne opfattes som Generalisationer af de velkendte trigonometriske Rækker for $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{4}$. For $\varphi = \frac{\pi}{2}$ giver (34') den sidste (20), medens $\varphi = \frac{\pi}{4}$ videre giver den i Sammenligning med (20) mærkelige Formel

$$\sum_1^{n-1} A_{2\nu}\, A_{2n-2\nu} + \sum_1^{n-1} B_{2\nu+1}\, B_{2n-2\nu-1} = \frac{2n-1}{2} t_{2n}. \qquad (35)$$

35. For at undersøge de med (α) i Art. 34 analoge Integraler ville vi gaa ud fra den elementære Formel

$$\frac{\cos p\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi} = \cot \tfrac{1}{2}\varphi - 2(\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin(p-1)\varphi) - \sin p\varphi$$

og faa da ved delvis Integration

$$\int_0^{\varphi} \sin p\varphi \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \frac{1-\cos p\varphi}{p} \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} \frac{\cos \nu\varphi}{\nu} + \frac{\cos p\varphi}{2p^2} - \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{\nu=p-1} \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2p^2},$$

hvoraf ved en ny Integration fra 0 til π og Anvendelse af (28)

$$(-1)^{p-1} \int_0^{\pi} \varphi \sin p\varphi \log \cos \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi\sigma_1}{p} - \frac{\pi}{p}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}\right),$$

der atter giver de to Formler

$$\int_0^\pi \varphi\, S_{n-1}(\varphi) \log \cos \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\pi\sigma_1 s_n - \pi c_{n,1}, \tag{36}$$

$$\int_0^\pi \varphi\, \bar{S}_{n-1}(\varphi) \log \cos \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\pi\sigma_1 \sigma_n + \pi\gamma_{n,1}, \tag{36'}$$

der gælde for henholdsvis $n > 1$ og $n \geqq 1$.

Integralet i (36) kan altid bestemmes ved delvis Integration, saa at vi altsaa her have et nyt Bevis for Rekursionsformlen (7). Paa samme Maade gaar det med Integralet i (36') for lige n, hvorved vi altsaa paa ny komme til (21). Hvis n er ulige og større end 1, kan Integralet derimod ikke bestemmes paa denne Maade, saaledes at vi altsaa heller ikke kunne summere Rækken $\gamma_{2n-1,1}$.

36. Ved at gaa ud fra den elementære Formel

$$\frac{\cos p\varphi \sin \frac{1}{2}\varphi}{\cos \frac{1}{2}\varphi} = (-1)^p \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi + (-1)^{p-1} 2 (\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \cdots + (-1)^p \sin (p-1)\varphi) + \sin p\varphi$$

faa vi paa samme Maade som før

$$\int_0^\pi \varphi\, \bar{S}_{n-1}(\varphi) \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \pi\sigma_1 s_n - \pi d_{n,1} - \frac{\pi}{2}(s_{n+1} + \sigma_{n+1}), \tag{37}$$

$$\int_0^\pi \varphi\, S_{n-1}(\varphi) \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \pi\sigma_1 \sigma_n + \pi \delta_{n,1} - \frac{\pi}{2}(s_{n+1} + \sigma_{n+1}), \tag{38}$$

der ved Anvendelse af (1') og (1'') kunne skrives som

$$\int_0^\pi \varphi\, \bar{S}_{n-1}(\varphi) \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}(s_{n+1} - \sigma_{n+1}) - \pi\gamma_{1,n}, \tag{37'}$$

$$\int_0^\pi \varphi\, S_{n-1}(\varphi) \log \sin \tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}(s_{n+1} - \sigma_{n+1}) - \pi\delta_{1,n}. \tag{38'}$$

Ved disse Formler kunne vi ligeledes paa ny udlede Formlerne for $d_{n,1}$, $\gamma_{1,n}$ og $\delta_{2n,1}$, medens vi heller ikke ad denne Vej kunne summere Rækkerne $\delta_{2n-1,1}$, naar $n > 1$.

§ 10. Summation af $c_{m,n}$ og de analoge, naar $m - n$ er ulige.

37. Før vi kunne generalisere Formlerne i § 9 maa vi bevise en ejendommelig Integralsætning.

Vi antage foreløbig $m > 1$ og $n > 1$. Rækkerne $C_m(\varphi)$ og $C_n(\varphi)$ og de analoge ere da alle ubetinget konvergente, saa at vi paa sædvanlig Maade kunne multiplicere to hvilke som helst af dem. Da alle Rækkerne endvidere ere ligelig konvergente, tør vi omforme Produktet ved Formlerne

$$\cos\mu\varphi\cos\nu\varphi = \tfrac{1}{2}\cos(\mu+\nu)\varphi + \tfrac{1}{2}\cos(\mu-\nu)\varphi$$

$$\sin\mu\varphi\sin\nu\varphi = \tfrac{1}{2}\cos(\mu-\nu)\varphi - \tfrac{1}{2}\cos(\mu+\nu)\varphi,$$

hvoraf ved (28)

$$\int_0^\pi C_m(\varphi)\,C_n(\varphi)\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\,S_n(\varphi)\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1}\frac{1}{\mu^m(\nu-\mu)^n}, \tag{39}$$

$$\int_0^\pi C_m(\varphi)\,C_n(\varphi)\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\,S_n(\varphi)\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1}\frac{1}{\mu^m(\nu-\mu)^n}, \tag{39'}$$

$$\int_0^\pi C_m(\varphi)\,\overline{C}_n(\varphi)\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\,\overline{S}_n(\varphi)\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty}\frac{1}{\nu}\sum_{\mu=1}^{\mu=\nu-1}\frac{(-1)^{\mu-1}}{\mu^m(\nu-\mu)^n}. \tag{39''}$$

Betegne vi nu de numeriske Rækker i (39)—(39'') med henholdsvis $X_{m,n}$, $Y_{m,n}$ og $Z_{m,n}$, faa vi uden Vanskelighed

$$X_{m,n} + X_{m-1,n+1} = s_m s_{n+1}, \qquad X_{1,m+n-1} = c_{m+n,1} + s_{m+n+1},$$

$$Y_{m,n} + Y_{m-1,n+1} = \sigma_m\sigma_{n+1}, \qquad Y_{0,m+n} = \gamma_{1,m+n},$$

$$Z_{m,n} + Z_{m-1,n+1} = s_m\sigma_{n+1}, \qquad Z_{1,m+n-1} = \sigma_1 s_{m+n} - \gamma_{m+n,1}.$$

Hvis $m+n$ er lige, kunne altsaa alle tre Rækker $X_{m,n}$, $Y_{m,n}$ og $Z_{m,n}$ reduceres til de reciproke Potenssummer s_r og σ_r.

38. For at undersøge Undtagelsestilfældet i Art. 37 anvende vi Metoden i Art. 31 og faa altsaa ved delvis Integration og ved (28):

$$\int_0^\pi \cos p\varphi\,(\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi)^2\,d\varphi = \frac{\pi\sigma_1}{p} + \frac{\pi}{p}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right) + \frac{\pi}{2p^2}. \tag{40}$$

Endvidere faa vi uden Vanskelighed

$$\int_0^\pi \cos(2n+1)\varphi\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = 0, \tag{41}$$

og paa samme Maade som før

$$\int_0^\pi \cos 2n\varphi\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi = \frac{\pi\sigma_1}{2n} + \frac{\pi}{8n^2} - \frac{\pi}{2n}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}\right). \tag{41'}$$

Vi se altsaa, at Formlerne (39) vedblive at gælde, naar $m \geqq 1$, $n = 1$.

39. Hvis $m-n$ er et lige Tal, kan et af Integralerne i enhver af Formlerne (39) ved Metoden i Art. 33 reduceres til de reciproke Potenssummer s_r og σ_r, saaledes at vi faa den følgende ejendommelige Integralsætning:

Ethvert af Integralerne i (39)—(39″) *er, for* $m-n$ *lige, lig med* $\frac{\pi}{2}$ *multipliceret med et helt Polynomium, der er homogent af Graden* $m+n+1$ *i* $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_{m+n+1}$. *Alle Koefficienter ere rationale Tal, og intet Led kan indeholde mere end to Faktorer* σ_r.

Medens vi saaledes have bestemt Integralerne i (39), naar blot Rækkerne $C_m(\varphi)$, $C_n(\varphi)$ og de analoge enten begge ere rationale eller begge transcendente Funktioner af φ, vide vi intet om Integralerne af samme Form, men i hvilke den ene af Rækkerne er elementær, den anden transcendent.

40. Vi antage fremdeles $m > 1$ og $n > 1$ og faa da ved Metoden i Art. 37:

$$\int_0^\pi C_m(\varphi)\, C_n(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sigma_1 s_{m+n} - \frac{\pi}{4}(A_{m,n} + A_{n,m} + X_{m,n}), \tag{a}$$

$$\int_0^\pi S_m(\varphi)\, S_n(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\sigma_1 s_{m+n} - \frac{\pi}{4}(A_{m,n} + A_{n,m} - X_{m,n}), \tag{a'}$$

hvor $X_{m,n}$ har den i Art. 37 angivne Betydning, og hvor

$$A_{m,n} = \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^m}\left(\frac{1}{1^n(\nu-1)} + \frac{1}{2^n(\nu-2)} + \cdots + \frac{1}{(\nu-1)^n 1}\right),$$

saaledes at vi efter en simpel Regning faa Formlen

$$\int_0^\pi C_{m-1}(\varphi)\, C_n(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\, S_{n-1}(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{4}(s_m s_n + c_{m,n} - c_{n,m}),$$

der, efter en Omformning af $s_m s_n$ ved (1), gaar over til

$$\int_0^\pi C_{m-1}(\varphi)\, C_n(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\, S_{n-1}(\varphi) \log\cos\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2} c_{m,n} - \frac{\pi}{4} s_{m+n}. \tag{42}$$

Paa lignende Maade faa vi endvidere de analoge Formler

$$\int_0^\pi C_{m-1}(\varphi)\, C_n(\varphi) \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\, S_{n-1}(\varphi) \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = +\frac{\pi}{2}\delta_{m,n} - \frac{\pi}{4} s_{m+n}, \tag{42'}$$

$$\int_0^\pi C_{m-1}(\varphi)\, \overline{C}_n(\varphi) \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi - \int_0^\pi S_m(\varphi)\, \overline{S}_{n-1}(\varphi) \log\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi = +\frac{\pi}{2}\gamma_{m,n} - \frac{\pi}{4}\sigma_{m+n}. \tag{42''}$$

Ved at anvende (1') og Sætningen i Art. 39 faa vi saaledes af disse Formler den ny Sætning:

Hvis $m-n$ *er ulige, er enhver af Rækkerne* $c_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$, $d_{m,n}$ *og* $\delta_{m,n}$ *lig med et helt Polynomium, der er homogent af Graden* $m+n$ *i Rækkerne* $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{m+n}$. *Alle Koefficienterne ere rationale Tal, og intet Led indeholder mere end to Faktorer* σ_r.

Hvis $m-n$ er lige, lærer vor foregaaende Metode os altsaa intet om Rækkerne $c_{m,n}$ og de analoge.

Som Exempel vælge vi $c_{2n-1,2}$. Af (42) faa vi ved Anvendelse af (33) og (33')

$$c_{2n-1,2}=\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1}2\nu\, s_{2\nu+1}s_{2n-2\nu}+s_2s_{2n-1}-\frac{(n+1)(2n+1)}{2}s_{2n+1}-s_{2n+1},$$

der sammen med (13) giver

$$c_{2n-1,2}+c_{2,2n-1}=s_2s_{2n-1}-s_{2n+1},$$

hvilket er i Overensstemmelse med (1).

Andet Afsnit.

Om nogle Rækker og Integraler, der reduceres til s_n og σ_n.

IV.

Om Rækkerne $\Omega_{m,n}$ $\Omega'_{m,n}$ og $Z_{m,n}$.

§ 11. Definitioner for $\Omega_{m,n}$ og de analoge.

41. Vi definere Tallene $\omega_m^{(n)}$ ved Ligningerne

$$\omega_n^{(0)} = 1, \quad n \geqq 0$$

$$\omega_n^{(p)} = \omega_{n-1}^{(p)} + \frac{1}{n}\,\omega_{n-1}^{(p-1)}, \quad p \leqq n$$

$$\omega_n^{(p)} = 0, \quad p > n,$$

der uden Vanskelighed give den almindelige Formel

$$\omega_n^{(p)} = \frac{1}{p}\,\omega_{p-1}^{(p-1)} + \frac{1}{p+1}\,\omega_p^{(p-1)} + \cdots + \frac{1}{n}\,\omega_{n-1}^{(p-1)}, \tag{α}$$

hvoraf

$$\omega_n^{(1)} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\omega_n^{(n)} = \frac{1}{n!}$$

o. s. v.

Skønt Afhængigheden mellem Tallene $\omega_m^{(n)}$ og Fakultetkoefficienterne altsaa er aabenbar, ville vi dog foretrække Betegnelsen $\omega_m^{(n)}$, da vi derved opnaa de simpleste Udtryk for de Formler, vi i det kommende ville udvikle. Tallene $\omega_m^{(n)}$ ere forøvrigt indførte allerede af *Schläfli* [1]).

42. Ved Hjælp af (α) beviser man nu uden Vanskelighed Uligestorheden

$$\omega_n^{(p+1)} > \omega_n^{(p)},$$

idet n er tilstrækkelig stor i Sammenligning med p; derved faar man atter

[1]) Crelle's Journal, Bd. 43, Pag. 11.

$$\frac{\omega_n^{(p)}}{n+1} > \frac{\omega_{n+1}^{(p)}}{n+2},$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{\omega_n^{(p)}}{n^{\varepsilon}} = 0,$$

hvor ε er en vilkaarlig, nok saa lille, men endelig, positiv ægte Brøk. Af disse Bemærkninger følger dernæst umiddelbart Konvergensen af de tre Rækker

$$\Omega_{m,n} = \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^m} \omega_{\nu-1}^{(n)}, \qquad m > 1,$$

$$\Omega'_{m,n} = \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^{\nu-n-1}}{\nu^m} \omega_{\nu-1}^{(n)}, \qquad m \geqq 1,$$

$$Z_{m,n} = \sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{\omega_{\nu-1}^{(n)}}{\nu^m}, \qquad m \geqq 1.$$

Som Ligningerne

$$\Omega_{m,1} = c_{m,1}, \qquad \Omega'_{m,1} = \gamma_{m,1}$$

vise det, ere $\Omega_{m,n}$ og $\Omega'_{m,n}$ altsaa Generalisationer af de tidligere undersøgte Rækker $c_{m,1}$ og $\gamma_{m,1}$. For $n = 0$ gaa $\Omega_{m,n}$ og $\Omega'_{m,n}$ over til henholdsvis s_n og σ_n. Vi ville endvidere i det følgende bruge Betegnelsen

$$a_m = Z_{m,0} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{2^\nu \nu^m}.$$

43. Af den bekendte Rækkeudvikling

$$\log^p(1-c) = (-1)^p p! \sum_{\nu=p}^{\nu=\infty} \frac{\omega_{\nu-1}^{(p-1)}}{\nu} c^\nu$$

faar man dernæst uden Vanskelighed de tre Formler

$$\int_0^1 \frac{\log^n(1-c)\log^m c}{1-c} dc = (-1)^{m+n} m!\, n!\, \Omega_{m+1,n},$$

$$\int_0^1 \frac{\log^n(1+c)\log^m c}{1+c} dc = (-1)^m m!\, n!\, \Omega'_{m+1,n},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\log^n(1-c)\log^m c}{1-c} dc = (-1)^{m+n} m!\, n! \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{\sigma_1^{m-\nu}}{(m-\nu)!} Z_{\nu+1,n}.$$

Af de to sidste faar man umiddelbart for $m = 0$:

$$\Omega'_{1,n} = Z_{1,n} = \frac{\log^{n+1} 2}{(n+1)!}, \tag{43}$$

medens den første ved delvis Integration giver

$$\Omega_{m,n} = \Omega_{n+2,m-2}, \tag{44}$$

hvoraf atter de specielle Formler

$$\Omega_{2,n} = s_{n+2}, \qquad \Omega_{3,n} = c_{n+2,1}. \tag{44'}$$

Symmetrisætningen i (44) er analog med den, *Schläfli*[1]) har bevist for visse endelige Rækker, der gaa frem efter $\omega_m^{(n)}$.

44. Vi ville imidlertid omforme de lige givne Integraludtryk for vore Rækker, idet vi henholdsvis sætte $c = \sin^2\varphi$, $c = \mathrm{tg}^2\varphi$ og $c = \sin^2\varphi$, hvorved

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\,\varphi \log^n \cos\varphi \log^m \sin\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^{m+n} m!\, n!}{2^{m+n+1}} \Omega_{m+1,n}, \tag{45}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,\varphi \log^n \cos\varphi \log^m \mathrm{tg}\,\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^{m+n} m!\, n!}{2^{m+n+1}} \Omega'_{m+1,n}, \tag{45'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,\varphi \log^n \cos\varphi \log^m \sin\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^{m+n} m!\, n!}{2^{m+n+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{\sigma_1^{m-\nu}}{(m-\nu)!} Z_{\nu+1,n}, \tag{45''}$$

der skulle tjene os som Udgangspunkt ved vore kommende Undersøgelser.

For $n = 0$ give de tre Formler (45) henholdsvis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\,\varphi \log^m \sin\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^m m!}{2^{m+1}} s_{m+1}, \tag{46}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,\varphi \log^m \mathrm{tg}\,\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^m m!}{2^{m+1}} \sigma_{m+1}, \tag{46'}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\,\varphi \log^m \sin\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^m m!}{2^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{\sigma_1^{m-\nu}}{(m-\nu)!} a_{\nu+1}, \tag{46''}$$

der ligeledes senere skulle blive os til Nytte.

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. 43, 1852, Pag. 18.

§ 12. Summation af $\Omega_{m,n}$.

45. Ved Hjælp af Formlen

$$\int_0^1 c^{y-1}(1-c)^{x-1}\,dc = B(x,y)$$

faa vi af den første i Art. 43:

$$\Omega_{m+1,n} = \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\left(D_x^n D_y^m B(x,y)\right)_{x=0,\,y=1}, \tag{47}$$

der sætter os i Stand til at summere Rækken $\Omega_{m,n}$ ved Metoden, jeg har anvendt i Afhandlingen «*Théorème sur les intégrales etc.*» [1]).

Ved den i § 5 benyttede Funktion $K(x)$ faa vi nemlig efter at have anvendt logaritmisk Differentiation:

$$D_y B(x,y) = B(x,y)\left(K(x+y)-K(y)\right). \tag{a}$$

Differentieres nu (a) gentagne Gange med Hensyn til y, faar man, ved en fra Differentialregningen bekendt Sætning, Formlen

$$D_y^m B(x,y) = B(x,y)\left(\sum_0^{m-2}\binom{m}{\nu}A_{m-\nu}\,a^\nu + a^m\right), \tag{48}$$

hvor vi have sat

$$a = K(x+y)-K(y), \qquad a_r = D_y^r a, \tag{48'}$$

og hvor Polynomierne A_r dannes efter Loven

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= a_1 \\ A_r &= D_y A_{r-1} + (r-1)\,a_1 A_{r-2}. \end{aligned}\right\} \tag{48''}$$

46. Inden vi gaa over til en videre Anvendelse af Formlerne (48), ville vi forudskikke nogle Bemærkninger om Polynomierne A_r.

Af (48'') se vi strax, at A_r bliver homogent af Graden r i $a_1 a_2 \ldots a_{r-1}$, naar a_m regnes for at være af Graden $m+1$. Alle Koefficienterne i A_r ere hele Tal.

Endvidere beviser man let de følgende Sætninger:

1° Af Led i A_r, der kun indeholde en Faktor a_μ, er der kun a_{r-1}.

2° Leddene, der have Formen $a_\mu a_\nu$, blive

$$\frac{1}{2!}\sum_{\nu=2}^{\nu=r-2}\binom{r}{\nu}a_{r-\nu-1}\,a_{\nu-1}.$$

---

[1]) Oversigt over Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1897.

3° Leddene, der have Formen $a_\mu a_\nu a_\rho$, blive

$$\frac{1}{3!}\sum \frac{r!}{\nu_1!\,\nu_2!\,\nu_3!}\,a_{\nu_1-1}\,a_{\nu_2-1}\,a_{\nu_3-1},$$

hvor de positive, hele Tal ν_1, ν_2, ν_3 alle skulle være større end 1 og kunne antage alle mulige Værdier, for hvilke $\nu_1+\nu_2+\nu_3=r$.

Disse Sætninger kunne uden Vanskelighed generaliseres, hvilket vi dog ikke her ville opholde os ved.

47. Differentiere vi nu (48) n Gange med Hensyn til x, og sætte vi derpaa $x=y=\frac{1}{2}$, faa vi den følgende Sætning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^m \cos\varphi \log^n \sin\varphi\, d\varphi$$

bliver lig med $\frac{\pi}{2}$ *multipliceret med et helt Polynomium, der er homogent af Graden* $m+n$ *i* σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots \sigma_{m+n}$, *naar* σ_r *regnes for at være af Graden* r. *Alle Polynomiets Koefficienter ere rationale Tal.*

Her have vi altsaa bestemt den ene af de Klasser af bestemte Integraler, jeg tidligere har behandlet i min i Art. 45 citerede Afhandling.

Bierens de Haan [1]) har af Integraler af denne Form kun det, der svarer til $m=0$, $n=2$.

48. For at summere Rækkerne $\Omega_{m,n}$ sætte vi i (48) $y=1$ og betegne de Værdier, som a og a_r antage for denne Værdi af y, med henholdsvis v og v_r, saaledes at man altsaa faar

$$v_0 = v = K(x+1) - K(1) = -s_2 x + s_3 x^2 - s_4 x^3 + \cdots$$

$$v_r = K^{(r)}(x+1) - K^{(r)}(1) = (-1)^{r+1} r!\left(\binom{r+1}{1} s_{r+2}x - \binom{r+2}{2} s_{r+3}x^2 + \cdots\right),$$

hvoraf for $x=0$:

$$\left.\begin{aligned} (v_r)_0 &= 0, \quad r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \\ (D_x^p v_r)_0 &= (-1)^{r+p}(p+r)!\,s_{p+r+1}, \quad r = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \quad p>0. \\ D_x^p\left(\frac{v_r}{x}\right)_0 &= (-1)^{r+p+1}\frac{(r+p+1)!}{p+1}\,s_{p+r+2}, \quad p,r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Betyder endvidere V_r Værdien af A_r for $y=1$, faar man af (48)

$$\int_0^1 (1-c)^{x-1}\log^m c\, dc = \frac{1}{x}\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=m-2}\binom{m}{\nu} V_{m-\nu} v^\nu + v^m\right). \tag{50}$$

[1]) Nouvelles Tables d'Intégrales définies, Pag. 169.

Da Nævneren x paa højre Side i (50) kan bortdivideres, tør vi altsaa i denne Formel differentiere et vilkaarligt Antal Gange med Hensyn til x og derpaa sætte $x = 0$, hvorved vi faa den følgende Sætning:

$$(-1)^{m+n+1}(m-1)!\,n!\,\Omega_{m,n} = 2^{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^n \cos\varphi \log^{m-1}\sin\varphi\, d\varphi\,,$$

hvor m maa forudsættes større end 1, er lig med et helt Polynomium, der er homogent af Graden $m+n$ i $s_2, s_3, \ldots s_{m+n}$, og alle dets Koefficienter ere hele Tal.

Det er værd at lægge Mærke til, at $\log 2$ ikke indgaar i Udtrykket for dette Integral.

Ved den lige beviste Sætning have vi altsaa ogsaa bestemt den anden Klasse af Integraler, der omtales i den nævnte Afhandling.

Bierens de Haan[1]) har af Integraler af denne Form kun det, der svarer til $m = 1$ og n lige.

49. Formlen (44) i Art. 43 viser, at vi, for at kende alle Rækkerne $\Omega_{m,n}$, kun behøve at kende dem, for hvilke $m > n$. Efter denne Bemærkning ville vi anvende vor almindelige Metode til Bestemmelse af nogle af de simpleste af Rækkerne $\Omega_{m,n}$.

$n = 0$. Ifølge (49) er det aabenbart, at alle Led paa højre Side i (50), der indeholde mere end en Faktor v, falde ud, saa at man faar

$$\Omega_{m,0} = s_m.$$

$n = 1$. Alle Led, der indeholde mere end to Faktorer v, falde ud. Vi have altsaa kun tilbage for $x = 0$ at bestemme Værdien af

$$D_x\left(\frac{v_{m-2}}{x}\right) + \sum_{\nu=2}^{\nu=m-3} \binom{m-1}{\nu} \frac{v_{m-\nu-2}}{2x} D_x v_{\nu-1} + (m-1)\frac{v_{m-3}}{x} D_x v.$$

Ved (49) faar man strax

$$\Omega_{m,1} = \frac{m}{2} s_{m+1} - \frac{1}{2}\sum_{\nu=2}^{\nu=m-1} s_\nu s_{m-\nu+1}\,,$$

saaledes at vi altsaa her have genfundet Formlen for $c_{m,1}$.

[1]) Nouvelles Tables d'Intégrales définies, Pag. 442.

§ 13. Sætninger om $\Omega_{m,n}$ og $\Omega'_{m,n}$.

50. Man faar ved at anvende delvis Integration og dernæst i det ny Integral sætte $\frac{\pi}{2} - \varphi$ for φ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^{n-\nu}\cos\varphi \log^{\nu}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{(-1)^n}{n+1-\nu}\frac{\sigma_1^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{\nu}{n+1-\nu}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi \log^{n-\nu+1}\sin\varphi \log^{\nu-1}\cos\varphi\, d\varphi,$$

hvoraf ved (45):

$$\left.\begin{aligned} \binom{n}{\nu}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^{n-\nu}\cos\varphi \log^{\nu}\sin\varphi\, d\varphi + \binom{n}{n-\nu+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^{\nu-1}\cos\varphi \log^{n-\nu+1}\cos\varphi\, d\varphi \\ = \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{\nu}\frac{\sigma_1^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\Omega_{n-\nu+2,\,\nu-1}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

som vi i det følgende skulle anvende paa forskellig Maade. Sætte vi i (51) $n = 2m+1$, $\nu = m+1$, faa vi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^{m}\cos\varphi \log^{m+1}\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\sigma_1^{2m+2}}{2^{2m+2}(2m+2)} - \frac{(m+1)!\,m!}{2^{2m+3}}\Omega_{m+2,\,m}, \tag{52}$$

saaledes at Integralet paa venstre Side altsaa kan reduceres til de reciproke Potenssummer σ_r.

51. Ved at gaa ud fra Identiteten

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \log\sin\varphi - \log\cos\varphi$$

og derpaa anvende Binomialformlen faar man af (51)

$$\left.\begin{aligned} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^{2n-1}\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi = -\frac{(2n-1)!}{2^{2n}}\sum_{\nu=0}^{\nu=2n-2}{}' (-1)^{\nu}\Omega_{\nu+2,\,2n-\nu-2} + \frac{\sigma_1^{2n}}{n\cdot 2^{2n}} \\ - \frac{\sigma_1^{2n}}{2n\cdot 2^{2n}}\sum_{\nu=0}^{\nu=2n-2}{}' (-1)^{\nu}\binom{2n}{\nu+1} \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

En bekendt elementær Sætning viser, at Koefficienten til σ_1 i (a) bliver 0. Erindres (44), er det desuden klart, at den første Sum kan omskrives, saa at den alene indeholder $\Omega_{2,\,2n-2}$, $\Omega_{3,\,2n-3}$, ... $\Omega_{n+1,\,n-1}$, der alle, undtagen den sidste, ville forekomme to Gange. Ved (46') faa vi altsaa den elegante Formel

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=n+1}{}' (-1)^{\nu}\Omega_{\nu,\,2n-\nu} = \sigma_{2n}, \tag{53}$$

hvor Accenten efter Summationstegnet betyder, at det sidste Led skal halveres.

Udskyde vi af Summen i (53) $\Omega_{2,2n-2}$, kan denne Formel ifølge (44') skrives som

$$\sum_{\nu=3}^{\nu=n+1}{}' (-1)^{\nu-1}\Omega_{\nu,2n-\nu} = \frac{s_{2n}}{2^{2n-1}}. \tag{53'}$$

52. Paa samme Maade som i forrige Art. faa vi ligeledes Formlen

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi(\log\cos\varphi+\log\sin\varphi)^n d\varphi = (-1)^n\frac{\sigma_1^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Omega_{n-\nu+2,\nu-1}. \tag{β}$$

Hvis nu $\beta(x)$ betyder den anden i § 5 benyttede Funktion, og g_r dannes efter Loven (48), idet $\beta(x)$ sættes i Stedet for a, har jeg i Afhandlingen «*Théorème sur les intégrales etc.*» [1]) bevist Formlen

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi(\log\cos\varphi+\log\sin\varphi)^n d\varphi = \frac{1}{2^{n+2}}(g_{n+1}(1)+(-1)^n\sigma_1^{n+1}), \tag{γ}$$

hvor $g_r(1)$ betyder Værdien af g_r for $x=1$, saaledes at (β) altsaa kan skrives som

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\Omega_{n-\nu+2,\nu-1} = \frac{(-1)^n 2^{n+1}}{(n+1)!}g_{n+1}(1), \tag{54}$$

der ved (44) atter kan omformes til

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=n+1}{}'\Omega_{\nu,2n-\nu} = -\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}g_{2n}(1), \tag{54'}$$

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=n+1}\Omega_{\nu,2n-\nu+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}g_{2n+1}(1), \tag{54''}$$

hvor Accenten i (54') som før betyder, at det sidste Led skal halveres.

53. Ved at gaa ud fra Identiteten

$$\log\sin\varphi+\log\cos\varphi = 2\log\cos\varphi+\log\operatorname{tg}\varphi$$

og anvende Binomialformlen faa vi af (γ) og (45') den ny Formel

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n}2^\nu\Omega'_{n-\nu+1,\nu} = \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)!}(g_{n+1}(1)+(-1)^n\sigma_1^{n+1}),$$

[1]) Oversigt over Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1897.

der, ved (43), atter gaar over til

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} 2^{\nu} \Omega'_{n-\nu+1,\nu} = \frac{(-1)^n 2^n}{(n+1)!} g_{n+1}(1), \tag{55}$$

hvoraf ved (54) den mærkelige Formel

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \Omega_{n-\nu,\nu} = 2\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} 2^{\nu} \Omega'_{n-\nu,\nu}. \tag{56}$$

§ 14. Relationer mellem $Z_{m,n}$ og $\Omega'_{m,n}$.

54. Af Definitionen (45″) for $Z_{m,n}$ faar man ved (51) Formlen

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\sigma_1^{n-\nu}}{(n-\nu)!} Z_{\nu+1,m-1} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{\sigma_1^{m-\nu}}{(m-\nu)!} Z_{\nu+1,n-1} = \frac{\sigma_1^{m+n}}{m!\,n!} + \Omega_{m+1,n-1}, \tag{57}$$

hvoraf en Mængde andre kunne udledes. Vi ville her kun betragte $m = 1$, der, ved (43) og (44′), giver

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\sigma_1^{n-\nu}}{(n-\nu)!} a_{\nu+1} + Z_{2,n-1} = s_{n+1}. \tag{57′}$$

Anvende vi dernæst Identiteten

$$\log\sin\varphi = \log\cos\varphi + \log\operatorname{tg}\varphi,$$

faa vi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^m\cos\varphi \log^n\sin\varphi\, d\varphi = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \binom{n}{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\varphi \log^{m+\nu}\cos\varphi \log^{n-\nu}\operatorname{tg}\varphi\, d\varphi,$$

der altsaa atter kan skrives som

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\sigma_1^{n-\nu}}{(n-\nu)!} Z_{\nu+1,m} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \binom{m+\nu}{\nu} \Omega'_{n-\nu+1,m+\nu}, \tag{58}$$

hvoraf en Mængde andre ligeledes kunne udledes. Saaledes faar man for $n = 1$

$$Z_{2,m} = \Omega'_{2,m} - \frac{\sigma_1^{m+2}}{(m+2)!}. \tag{58′}$$

For $n = 2$ finder man paa lignende Maade $Z_{3,m}$. Fortsætter man paa denne Maade, faar man den almindelige Sætning:

$Z_{m,n}$ er en lineær Funktion af Rækkerne $\Omega'_{r,q}$, $r \leqq m$, og Koefficienterne ere hele Polynomier i log 2. Udtrykket er homogent af Graden $m+n$, hvis σ_1 regnes for at være af Graden 1 og $\Omega'_{r,q}$ af Graden $q+r$.

Sætningen er reciprok, idet $\Omega'_{m.n}$ paa lignende Maade udtrykkes ved $Z_{r,q}$.

55. Af (58) og (57) faar man endelig den almindelige Formel

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \binom{m+\nu-1}{\nu} \Omega'_{n-\nu+1,\, m+\nu-1} + \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \binom{n-\nu-1}{\nu} \Omega'_{m-\nu+1,\, n+\nu-1} = \Omega_{m+1,\, n-1}, \tag{59}$$

hvoraf for $m=1$ den elegante Formel

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \Omega'_{n-\nu,\,\nu} = s_n - \Omega'_{2,\,n-2}. \tag{59'}$$

Ved Anvendelse af Metoden i Art. 15 beviser man nu endvidere let Sætningen:

Enhver af Rækkerne $\Omega'_{m,n}$, for hvilken $m > n$, er lig Summen af et helt Polynomium, der er homogent af Graden $m+n$ i $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots \sigma_{m+n}$, og af en lineær Funktion af de Rækker Ω', der have samme Indexsum og første Mærketal mindre end eller lig med sidste. Alle Koefficienterne i disse Udtryk ere rationale Tal.

56. Af (57') og (58') faa vi endelig Formlen

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} \frac{\sigma_1^{n-\nu}}{(n-\nu)!} a_{\nu+1} = s_{n+1} + \frac{\sigma_1^{n+1}}{(n+1)!} - \Omega'_{2,\,n-1}, \tag{60}$$

hvorved man altsaa ogsaa kan udtrykke Rækkerne a_r ved $\Omega_{2,s}$. For at opnaa dette vil det imidlertid være lettere at gaa en anden Vej.

Af Identiteten

$$-\log(\alpha-1) + \log\alpha = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu}\,\frac{1}{\alpha^\nu}, \qquad |\alpha| > 1,$$

faar man ved at dividere med α og derpaa integrere fra 1 til α:

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu} \log^\nu \alpha \int_1^\alpha \frac{\log^{n-\nu-1}\alpha}{\alpha-1}\, d\alpha = -\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{1}{\nu^n}\,\frac{1}{\alpha^\nu} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\log^n\alpha + \sum_{\nu=0}^{\nu=n-2} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} s_{n-\nu} \log^\nu \alpha, \tag{α}$$

der for $\alpha = 2$ gaar over til

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}(-1)^{\nu}\frac{\sigma_1^{\nu}}{\nu!\,(n-\nu-1)!}\int_0^1\frac{\log^{n-\nu-1}(1+\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = -a_n+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sigma_1^n+\sum_{\nu=0}^{\nu=n+2}\frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}\sigma_1^{\nu}s_{n-\nu},$$

hvoraf den søgte Formel

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\sigma_1^n-\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}(-1)^{\nu}\frac{\sigma_1^{\nu}}{\nu!}\Omega'_{2,n-\nu-2}+\sum_{\nu=0}^{\nu=n-2}(-1)^{\nu}\frac{\sigma_1^{\nu}}{\nu!}s_{n-\nu}. \tag{60'}$$

57. Sætter man i (60') $n = 2$ og $n = 3$, faar man henholdsvis

$$a_2 = \frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\log^2 2, \tag{61}$$

$$a_3 = \frac{7}{8}s_3-\frac{\pi^2}{12}\log 2+\frac{1}{6}\log^3 2, \tag{61'}$$

medens man tillige har

$$a_1 = \log 2;$$

men videre kunne vore almindelige Formler ikke lære os om Rækkerne a_n.

Formlerne (61) ere paa anden Maade beviste i min Afhandling «*Sur la sommation de quelques séries*» [1]. De bevises ogsaa let ved Fakultetrækker, der imidlertid heller ikke sætte os i Stand til at summere a_4 og de følgende. Endelig kan a_2 umiddelbart nedskrives ved *Legendre's* Formel [2])

$$L^{(2)}(x)+L^{(2)}(1-x) = s_2-\log x\log(1-x),$$

hvor $L^{(2)}(x)$ har den i Art. 8 angivne Betydning.

Erindres Udtrykket (5') for $\gamma_{1,1}$, faar man

$$a_2 = \sigma_2-\gamma_{1,1},$$

der kan udledes af en Formel af *Oettinger* [3]).

V.

Integraler, der reduceres til $\Omega_{m,n}$ og $\Omega'_{m,n}$.

§ 15. Om $\int_0^{\pi} X_n\left(\frac{\varphi}{2}\right)C_r(\varphi)\,d\varphi$ og analoge.

58. Det er aabenbart, at man af Formlerne i §§ 8—10 kan udlede en Del bestemte Integraler af mere speciel Form, og som alle reduceres til π og de reciproke

[1]) Oversigt over Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1896.
[2]) Exercices, tome I, Pag. 244.
[3]) Grunert, Archiv der Mathematik und Physik, Bd. 39.

Potenssummer σ_n. Vi kunne imidlertid ad anden Vej komme ikke blot til disse, men til langt almindeligere Resultater.

Malmstén's [1]) Teorem viser, at Rækken

$$\log^n(1+x) = n! \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-n} \frac{\omega_{\nu-1}^{(n-1)}}{\nu} x^\nu \qquad (\alpha)$$

er konvergent for $x = e^{i\varphi}$, $\varphi = \pm\pi$ undtagen. Sætte vi nu for Kortheds Skyld

$$\left(\sigma_1 + \log\cos\frac{\varphi}{2} + i\frac{\varphi}{2}\right)^n = X_n\left(\frac{\varphi}{2}\right) + i\,Y_n\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

hvor X og Y ere reelle, faa vi af (α)

$$X_n\left(\frac{\varphi}{2}\right) = n! \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-n} \frac{\omega_{\nu-1}^{(n-1)}}{\nu} \cos\nu\varphi, \qquad (62)$$

$$Y_n\left(\frac{\varphi}{2}\right) = n! \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-n} \frac{\omega_{\nu-1}^{(n-1)}}{\nu} \sin\nu\varphi, \qquad (62')$$

der altsaa begge ere gyldige for $-\pi < \varphi < +\pi$; (62) og (62') kunne tjene til Udledelsen af en Mængde Integralsætninger, af hvilke vi dog kun ville omtale de simpleste.

59. Integreres (62) og (62') saaledes fra 0 til π, faar man efter at have sat 2φ for φ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} X_n(\varphi)\,d\varphi = 0, \qquad (63)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_n(\varphi)\,d\varphi = \frac{n!}{2}\left(\Omega'_{2,n-1} + (-1)^{n-1} s_{n+1}\right), \qquad (63')$$

medens man ved (21) i Art. 31 faar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} X_n(\varphi) \log\cos\varphi\,d\varphi = (-1)^n\, n!\, \frac{\pi}{4} s_{n+1}, \qquad (64)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} X_n(\varphi) \log\sin\varphi\,d\varphi = -n!\,\frac{\pi}{4}\,\Omega'_{2,n-1}, \qquad (64')$$

[1]) Se f. Ex. Julius Petersen, Forelæsninger over Funktionsteori, Pag. 156.

der ved Hjælp af (63) og (63') give

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} X_n(\varphi) \log \sin 2\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_n(\varphi) \, d\varphi. \tag{64''}$$

Af Hjælpeformlen i Art. 38 faar man endvidere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Y_n(\varphi) \cot \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \sigma_1^n. \tag{65}$$

60. Af de i Art. 59 givne Formler kan man nu uden Vanskelighed udlede en Del af dem, der findes i den i Art. 57 citerede Afhandling; med de i denne brugte Betegnelser

$$(\log \cos \varphi + i\varphi)^n = \xi_n + i\eta_n,$$

hvor ξ_n og η_n ere reelle, faar man nemlig

$$\xi_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \sigma_1^\nu X_{n-\nu}(\varphi) + (-1)^n \sigma_1^n, \tag{β}$$

$$\eta_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \sigma_1^\nu Y_{n-\nu}(\varphi), \tag{γ}$$

saaledes at (63) giver

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_n \, d\varphi = (-1)^n \frac{\pi}{2} \sigma_1^n, \tag{66}$$

eller Formel (12) i den lige omtalte Afhandling. Af (63') faar man ligeledes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_n \, d\varphi = \frac{n!}{2} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu \frac{\sigma_1^\nu}{\nu!} \Omega_{2,n-\nu-1} + (-1)^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\sigma_1^\nu}{\nu!} s_{n-\nu+1} \right),$$

der ved (60') giver (14) i den samme Afhandling; for at faa (13) behøve vi blot at omforme (65) ved (γ), hvorved

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_n \cot \varphi \, d\varphi = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \sigma_1^n. \tag{66'}$$

Derimod synes det vanskeligere ad denne Vej at bevise (15) sammesteds. Det til (65) svarende Integral af $X_n(\varphi) \cot \varphi$ er nemlig, som man let ser, uendeligt.

61. Af ny Formler ville vi her kun nævne et Par, nemlig

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_n \log \sin 2\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_n \, d\varphi + (-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} \sigma_1^{n+1}, \tag{67}$$

der let udledes af (64″),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_n \log \cos \varphi \, d\varphi = (-1)^n n! \frac{\pi}{4} \left(\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{\sigma_1^\nu}{\nu!} s_{n-\nu+1} - 2\frac{\sigma_1^{n+1}}{n!} \right), \tag{68}$$

der dannes af (64), medens man af (64′) og (60′) faar

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_n \log \sin \varphi \, d\varphi = n! \frac{\pi}{4} \left(a_{n+1} - \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} (-1)^\nu \frac{\sigma_1^\nu}{\nu!} s_{n-\nu+1} - (-1)^n \frac{(2n+3)\sigma_1^{n+1}}{(n+1)!} \right). \tag{68′}$$

Ved Metoden i Art. 32 faar man endelig de almindeligere Formler

$$\int_0^\pi X_n\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) C_r(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi Y_n\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) S_r(\varphi)\, d\varphi = (-1)^{n-1} n! \frac{\pi}{2} \Omega_{r+1,\,n-1}, \tag{69}$$

$$\int_0^\pi X_n\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) \overline{C}_r(\varphi)\, d\varphi = \int_0^\pi Y_n\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) \overline{S}_r(\varphi)\, d\varphi = (-1)^{n-1} n! \frac{\pi}{2} \Omega'_{r+1,\,n-1}, \tag{69′}$$

hvoraf man kan udlede en Mængde mere specielle.

§ 16. Bestemmelse af $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n} \log^p \cos\varphi \, d\varphi$.

62. For den videre Anvendelse af (69) gaa vi ud fra den bekendte Identitet

$$\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} + 2\sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^\nu \frac{\pi^{2n-2\nu}}{(2n-2\nu+1)!} C_{2\nu}(\varphi), \tag{α}$$

der er gyldig for $-\pi \leqq \varphi \leqq +\pi$. Sættes nu for Kortheds Skyld

$$\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} X_m\left(\tfrac{\varphi}{2}\right) d\varphi = A_{2n+1,\,m}, \tag{β}$$

faar man af (α) og (69)

$$\left.\begin{aligned} A_{2n+1,\,m} &= (-1)^{m-1}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{\nu}\frac{\pi^{2n-2\nu+1}}{(2n-2\nu+1)!}\,\Omega_{2\nu+1,\,m-1}\,, \qquad m>0, \quad n>0, \\ A_{2n+1,\,0} &= \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad A_{1,\,m} = 0, \qquad m>0. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

For de kommende Anvendelsers Skyld ville vi her meddele følgende specielle Tilfælde af (70):

$$A_{3,\,0} = \pi s_2, \qquad A_{5,\,0} = \frac{3\pi}{4}s_4, \tag{70'}$$

$$A_{2n+1,\,2} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{\nu-1}\frac{\pi^{2n-2\nu+1}}{(2n-2\nu+1)!}\,\Omega_{2\nu+1,\,1}. \tag{71}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{2n+1,\,1} &= \sum_{\nu=1}^{\nu=n}(-1)^{\nu}\frac{\pi^{2n-2\nu+1}}{(2n-2\nu+1)!}\,s_{2\nu+1}, \\ A_{3,\,1} &= -\pi s_3, \qquad A_{5,\,1} = -\pi(s_2 s_3 - s_5), \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

$$\left.\begin{aligned} A_{3,\,m} &= (-1)^m \pi\,\Omega_{m+1,\,1}, \\ A_{3,\,3} &= -\pi(2s_5 - s_2 s_3). \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

63. Betyder nu ξ'_m Værdien af ξ_m, naar $\frac{\varphi}{2}$ sættes i Stedet for φ, faar man af (β)

$$\int_0^{\pi}\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}\frac{\xi'_m}{m!}d\varphi = \sum_{\nu=0}^{\nu=m}(-1)^{\nu}\frac{\sigma_1^{\nu}}{\nu!}A_{2n+1,\,m-\nu} = B_{2n+1,\,m-\nu}, \tag{γ}$$

der, ved selve Definitionen for ξ'_m, atter kan skrives som

$$B_{2n+1,\,m} = \sum_{\nu=n}^{E\left(\frac{m}{2}\right)}\frac{(-1)^{\nu}}{2^{2\nu}}\binom{2n}{2\nu}I_{2n+2\nu,\,m-2\nu}, \tag{γ'}$$

hvor $E\left(\frac{m}{2}\right)$ som sædvanlig betyder $\frac{m}{2}$ eller $\frac{m-1}{2}$, eftersom m er lige eller ulige, og hvor

$$I_{2n,\,r} = \int_0^{\pi}\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}\,\frac{\log^r\cos\frac{1}{2}\varphi}{r!}\,d\varphi.$$

Løser man nu (γ') og de analoge med lavere Mærketal m med Hensyn til $I_{2n,\,m}$ og de analoge, faar man

$$I_{2n,\,m} = \sum_{\nu=0}^{E\left(\frac{m}{2}\right)}\alpha_{2\nu}^{n}\,B_{2n+2\nu+1,\,m-2\nu}, \tag{δ}$$

hvor Tallene $a^n_{2\nu}$ dannes efter Loven

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=r} \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}} \binom{2n+2\nu}{2\nu} a^n_{2r-2\nu} = 0, \qquad a^n_0 = 1. \tag{74}$$

Det i (δ) fundne Udtryk for $I_{2n,m}$ kan imidlertid ved (γ) let ordnes efter stigende Potenser af σ_1; man faar

$$\int_0^\pi \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \frac{\log^m \cos \frac{1}{2}\varphi}{m!} = \sum_{\rho=0}^{\rho=m} (-1)^\rho \frac{\sigma_1^\rho}{\rho!} H_{2n+1, m-\rho}, \tag{75}$$

hvor vi for Kortheds Skyld have sat

$$H_{2n+1,r} = \sum_{\nu=0}^{E\left(\frac{r}{2}\right)} a^n_{2\nu} A_{2n+2\nu+1, r-2\nu}, \tag{74'}$$

Saaledes har man altsaa nu Midler til fuldstændig at reducere det bestemte Integral i (75) til de reciproke Potenssummer σ_r.

64. Sættes i (75) 2φ i Stedet for φ, faar man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n} \log^m \cos\varphi \, d\varphi = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}} \sum_{\rho=0}^{\rho=m} (-1)^\rho \binom{m}{\rho} \sigma_1^\rho C_{m-\rho}, \qquad C_{m-\rho} = \frac{(m-\rho)!}{\pi} H_{2n+1, m-\rho}, \tag{76}$$

der, naar n holdes konstant, kan tjene til en sukcessive Beregning af Integralerne for voxende m.

Antager man, at $I_{2n,0}$, $I_{2n,1}$, ... $I_{2n,r}$ alle ere beregnede, behøver man saaledes kun at beregne et nyt Led, C_{r+1}, for at kende $I_{2n,r+1}$.

For at rette en Regnefejl, der har indsneget sig i min tidligere Afhandling «*Sur la sommation de quelques séries*»[1]), sætte vi i (76) $n=1$, $m=2$ og $m=3$, hvorved

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\left(2 H_{3,2} - \binom{2}{1} \sigma_1 H_{3,1} + \sigma_1^2 H_{3,0}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log^3 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\left(6 H_{3,3} - 2\binom{3}{1} \sigma_1 H_{3,2} + \binom{3}{2} \sigma_1^2 H_{3,1} - \sigma_1^3 H_{3,0}\right).$$

[1]) Oversigt over Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger, 1896.

Da $\alpha_2^1 = \frac{3}{2}$, faar man af Formlerne (70)—(73):

$$H_{3,0} = A_{3,0} = \pi s_2,$$

$$H_{3,1} = A_{3,1} = -\pi s_3,$$

$$H_{3,2} = A_{3,2} + \tfrac{3}{2} A_{5,0} = \tfrac{11}{8} \pi s_4,$$

$$H_{3,3} = A_{3,3} + \tfrac{3}{2} A_{5,1} = \tfrac{\pi}{2}(s_5 + s_2 s_3),$$

hvoraf de sluttelige Formler

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log^2 \cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{\pi}{4}\left(\tfrac{11}{4} s_4 + \binom{2}{1} s_3 \sigma_1 + s_2 \sigma_1^2\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 \log^3 \cos\varphi\, d\varphi = -\tfrac{\pi}{4}\left(3(s_5 + s_2 s_3) + \binom{3}{1} \tfrac{11}{4} s_4 \sigma_1 + \binom{3}{2} s_3 \sigma_1^2 + s_2 \sigma_1^3\right).$$

65. Sættes i (76) $m = 1$, faar man af denne Formel, ved Anvendelse af (72)

$$\frac{2^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n} \log\cos\varphi\, d\varphi = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (-1)^\nu \frac{\pi^{2n-2\nu+1}}{(2n-2\nu+1)!} s_{2\nu+1} - \sigma_1 \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{77}$$

der ogsaa kunde udledes ved Metoden i Art. 30.

Multipliceres (α) med $\log\sin\frac{1}{2}\varphi\, d\varphi$, og integreres derpaa fra 0 til π, faar man, ved at anvende (29), den med (77) analoge

$$\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n} \log\sin\varphi\, d\varphi = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \frac{\pi^{2n-2\nu+1}}{(2n-2\nu+1)!} \sigma_{2\nu+1}, \tag{77'}$$

der ligeledes kunde findes ved Metoden i Art. 30; (77') er for $n = 1$ givet under en anden Form af *Legendre*[1]).

66. Af andre specielle Tilfælde af (76) kunde man betragte $n = 0$, der vilde give en Integralformel, som jeg tidligere har bevist paa flere andre Maader. For $m = 2$ reduceres Integralet endvidere let. Anvendes i dette Tilfælde (77), faar man efter en simpel Regning, som vi ikke her ville opholde os ved, den ejendommelige Formel

---

[1]) Exercices de calcul intégral.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \log^2 \cos\varphi \, d\varphi = \frac{2}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3} - \frac{1}{(2n+3)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\varphi} \frac{(\varphi-\psi)^{2n-1}}{(2n-1)!} \log\sin\psi \log\cos\varphi \, d\psi \, d\varphi; \quad (78)$$

(78) har et Par analoge, som det imidlertid vilde føre os for vidt at komme ind paa her.

§ 17. Om $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n-1} \log^p \cos\varphi \, d\varphi$.

67. Af Formlen (69') ser man derimod, at Bestemmelsen af

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{2n-1} \log^p \cos\varphi \, d\varphi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^{n} \log^p \sin\varphi \, d\varphi,$$

hvis $p > 1$, eller for det sidstes Vedkommende $n > 0$, foruden π og σ_r tillige kræver Rækkerne $\Omega'_{m,n}$, saaledes at vi altsaa ikke her kunne føre denne Bestemmelse til Ende.

Da Rækkerne a_r aabenbart gribe dybt ind i disse Problemer, da jeg endvidere er stanset ved de samme Rækker i andre Undersøgelser, har Dr. *Burrau* beregnet mig den følgende Tabel over Summen af $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{64}$.

Summationerne ere udførte ved at beregne Led for Led. Sidste Decimal er afrundet ved den sædvanlige Brug af Prikken, der antyder, at de næste Decimaler falde mellem 0·25 og 0·75 af den sidst medtagne Enhed; under 0·25 ere de bortkastede, over 0·75 forhøjede.

Som Kontrol har man Formlen

$$A_n = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left(a_\nu - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} a_1 - \sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{\nu^n(\nu-1)}.$$

Af Tabellen faar man

$$\tfrac{1}{2} a_1 = 0{\cdot}34567\ 35902\ 79972\ 65471,$$
$$A_{64} = 0{\cdot}34567\ 35902\ 79972\ 65469{\cdot}.$$

Endelig viser en Sammenligning mellem *Burrau*'s Værdi for $a_1 = \log 2$ og *J. C. Adams*'s [1]) (med 263 Decimaler) den fuldstændigste Overensstemmelse.

---

[1]) Proceedings of the Royal Society of London, Vol. XXVII, Pag. 92 (1878).

Burrau's Tabel over Tallene a_n.

a_1 = 0·69314 71805 59945 30942
a_2 = 0·58224 05264 65012 50590
a_3 = 0·53721 31936 08040 20094
a_4 = 0·51747 90616 73899 38633
a_5 = 0·50840 05792 42268 70746
a_6 = 0·50409 53978 03988 55069
a_7 = 0·50201 45633 24708 49457
a_8 = 0·50099 66590 97051 91055·
a_9 = 0·50049 48881 05953 61004
a_{10} = 0·50024 63206 06006 77501
a_{11} = 0·50012 27915 29867 95519
a_{12} = 0·50006 12742 26900 57874
a_{13} = 0·50003 05969 39516 83244
a_{14} = 0·50001 52851 61619 80326
a_{15} = 0·50000 76381 65262 83175
a_{16} = 0·50000 38176 15849 76963
a_{17} = 0·50000 19083 20253 25675
a_{18} = 0·50000 09539 97881 10079
a_{19} = 0·50000 04769 44936 19121
a_{20} = 0·50000 02384 54485 92692
a_{21} = 0·50000 01192 21253 71119·
a_{22} = 0·50000 00596 08631 63576·
a_{23} = 0·50000 00298 03651 04432·
a_{24} = 0·50000 00149 01604 00470
a_{25} = 0·50000 00074 50728 18096·
a_{26} = 0·50000 00037 25339 48883·
a_{27} = 0·50000 00018 62661 54486·
a_{28} = 0·50000 00009 31328 03953
a_{29} = 0·50000 00004 65663 10887·
a_{30} = 0·50000 00002 32831 25082·
a_{31} = 0·50000 00001 16415 52421
a_{32} = 0·50000 00000 58207 72837

a_{33} = 0·50000 00000 29103 85295
a_{34} = 0·50000 00000 14551 92273
a_{35} = 0·50000 00000 07275 96011·
a_{36} = 0·50000 00000 03637 97964·
a_{37} = 0·50000 00000 01818 98968·
a_{38} = 0·50000 00000 00909 49479·
a_{39} = 0·50000 00000 00454 74738
a_{40} = 0·50000 00000 00227 37368·
a_{41} = 0·50000 00000 00113 68684
a_{42} = 0·50000 00000 00056 84342
a_{43} = 0·50000 00000 00028 42171
a_{44} = 0·50000 00000 00014 21085.
a_{45} = 0·50000 00000 00007 10542·
a_{46} = 0·50000 00000 00003 55271·
a_{47} = 0·50000 00000 00001 77635·
a_{48} = 0·50000 00000 00000 88818
a_{49} = 0·50000 00000 00000 44409
a_{50} = 0·50000 00000 00000 22204·
a_{51} = 0·50000 00000 00000 11102
a_{52} = 0·50000 00000 00000 05551
a_{53} = 0·50000 00000 00000 02775·
a_{54} = 0·50000 00000 00000 01387·
a_{55} = 0·50000 00000 00000 00694
a_{56} = 0·50000 00000 00000 00347
a_{57} = 0·50000 00000 00000 00173·
a_{58} = 0·50000 00000 00000 00086·
a_{59} = 0·50000 00000 00000 00043·
a_{60} = 0·50000 00000 00000 00021·
a_{61} = 0·50000 00000 00000 00011
a_{62} = 0·50000 00000 00000 00005·
a_{63} = 0·50000 00000 00000 00002·
a_{64} = 0·50000 00000 00000 00001